Equazioni di Sylvester e Prodotti di Kronecker

$$AX - XB = C \qquad C \in \mathbb{C}^{m\times n}$$

$$\boxed{A} \cdot \boxed{X} - \boxed{X} \cdot \boxed{B} = \boxed{C} \qquad A \in \mathbb{C}^{m\times m}$$

$$B \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

$$X \in \mathbb{C}^{m\times n}$$

Cerchiamo X dati A, B, C

È un sistema lineare nelle entrate di X

$$\boxed{M} \cdot \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$$

entrate della X — entrate della C

<u>Definizione</u>: data $X \in \mathbb{C}^{m\times n}$

$$X = \left[\begin{array}{c|c|c|c} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{array}\right]$$

$$\operatorname{vec} X = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \\ \hline x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{m2} \\ \hline \vdots \\ \hline x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{mn} \qquad \operatorname{vec}: \mathbb{C}^{m\times n} \to \mathbb{C}^{mn}$$

x_{ij} va a finire in posizione $i + m(j-1)$

<u>Problema</u>: una mappa come $X \mapsto AXB$ è lineare nelle entrate della X. Qual è la matrice M tale che

$$M \cdot vec(X) = vec(AXB) \quad ?$$

$X \in \mathbb{C}^{m \times n}$ $\quad A \in \mathbb{C}^{p \times m}$ $\quad B \in \mathbb{C}^{n \times q}$

$$(AXB)_{hl} = \sum_j (AX)_{hj} B_{jl} = \sum_i \sum_j A_{hi} X_{ij} B_{jl}$$

$$= \left[A_{h1}B_{1l} \; A_{h2}B_{1l} \cdots A_{hm}B_{1l} \,\middle|\, A_{h1}B_{2l} \; A_{h2}B_{2l} \cdots A_{hm}B_{2l} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, A_{h1}B_{nl} \cdots A_{hm}B_{nl} \right] \cdot \begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{21} \\ \vdots \\ X_{m1} \\ \hline X_{12} \\ X_{22} \\ \vdots \\ X_{m2} \\ \hline X_{1n} \\ \vdots \\ X_{mn} \end{bmatrix}$$

= tanti blocchetti fatti con la riga h-esima di A moltiplicata per un elemento della colonna l-esima di B

La matrice M ha come righe questi vettori

$$vec(AXB) = \underbrace{\begin{bmatrix} A \cdot b_{11} & A \cdot b_{21} & \cdots & A \cdot b_{n1} \\ \hline A \cdot b_{12} & A \cdot b_{22} & \cdots & A \cdot b_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ \hline A b_{1q} & A \cdot b_{2q} & \cdots & A_{nq} \end{bmatrix}}_{M} vec(X)$$

<u>Def: Il prodotto di Kronecker</u> tra due matrici F e G è la matrice a blocchi:

$$F \otimes G = \begin{bmatrix} f_{11}G & f_{12}G & \cdots & f_{1m}G \\ \vdots & & & \vdots \\ f_{m1}G & \cdots & & f_{mn}G \end{bmatrix}$$

Con questa notazione, la matrice M di sopra è $M = B^T \otimes A$

Proprietà dei prodotti di Kronecker

- $(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) \otimes B = \alpha_1 (A_1 \otimes B) + \alpha_2 (A_2 \otimes B)$
  e analogamente nella seconda entrata
- $\mathrm{vec}(AXB) = (B^T \otimes A)\, \mathrm{vec}\, X$ per ogni A, B, X tali che AXB ha senso

  ⚠ È un trasposto anche se lavoriamo su $\mathbb{C}$, non un trasposto conjugato
- $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$ quando le dimensioni sono tali che AC, BD hanno senso

$$\underbrace{(A \otimes B)(C \otimes D)\, \mathrm{vec}\, X}_{} = (A \otimes B) \cdot \mathrm{vec}(DXC^T)$$

$$= \mathrm{vec}(B(DXC^T)A^T) = \mathrm{vec}((BD)X(AC)^T) = (AC \otimes BD)\, \mathrm{vec}\, X$$

- $(F \otimes G)^T = F^T \otimes G^T$
- Se Q_1, Q_2 ortogonali (unitarie), allora $Q_1 \otimes Q_2$ è ortogonale (o unitaria): infatti,

  $Q_1 Q_1^T = I_m$ $Q_2 Q_2^T = I_n$ implica

  $$(Q_1 \otimes Q_2)(Q_1 \otimes Q_2)^T = Q_1 Q_1^T \otimes Q_2 Q_2^T = I_m \otimes I_n = I_{mn}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \cdot I & 0 \cdot I & \cdots & 0 \cdot I \\ 0 \cdot I & 1 \cdot I & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \cdot I \\ 0 \cdot I & \cdots & 0 \cdot I & 1 \cdot I \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 6 & -1 & -2 \\ 9 & 12 & -3 & -4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 8 \end{array}\right]$$

- Nello stesso modo, si possono ottenere decomposizioni di $F \otimes G$ a partire da decomposizioni dei fattori.

  Ad esempio,
  $$F = U_F S_F V_F^* \qquad G = U_G S_G V_G^*$$

$$F \otimes G = U_F S_F V_F^* \otimes U_G S_G V_G^* = (U_F \otimes U_G)(S_F \otimes S_G)(V_F \otimes V_G)^*$$

ortogonale   diagonale   ortogonale

è una SVD (a parte riordinare gli elementi sulla diagonale)

$$\|F \otimes G\| = \sigma_{max}(F \otimes G) = \sigma_{max}(F)\, \sigma_{max}(G) = \|F\| \cdot \|G\|$$

$$S_F = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_m \end{bmatrix} \qquad S_G = \begin{bmatrix} \tau_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \tau_n \end{bmatrix}$$

$$S_F \otimes S_G = \left[\begin{array}{ccc} \begin{matrix} \sigma_1\tau_1 & & \\ & \sigma_1\tau_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \sigma_1\tau_n \end{matrix} & & \\ & \begin{matrix} \sigma_2\tau_1 & & \\ & \sigma_2\tau_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \sigma_2\tau_n \end{matrix} & \\ & & \ddots \\ & & & \begin{matrix} \sigma_m\tau_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_m\tau_n \end{matrix} \end{array}\right]$$

più grande

- $F \otimes G = \Pi (G \otimes F) \Pi^T$ per un'opportuna matrice di permutazione.

Teo: L'equazione di Sylvester

$$AX - XB = C \qquad A \in \mathbb{C}^{m\times m} \quad B \in \mathbb{C}^{n\times n} \quad C, X \in \mathbb{C}^{m\times n}$$

ammette soluzione unica <u>se e solo se</u> A e B non hanno autovalori in comune

$$\Lambda(A) \cap \Lambda(B) = \emptyset$$

Dim: l'equazione si riscrive come

$$\underset{mn}{\mathrm{vec}(C)} = \mathrm{vec}(AXI_n) - \mathrm{vec}(\underset{I_m}{}XB) = (I_n \otimes A)\,\mathrm{vec}\,X - (B^T \otimes I_m)\,\mathrm{vec}\,X$$

$$= \underbrace{(\overset{n\times n}{I_n} \otimes \overset{m\times m}{A} - \overset{n\times n}{B^T} \otimes \overset{m\times m}{I_m})}_{\substack{M \\ mn \times mn}} \underset{mn}{\mathrm{vec}\,X}$$

Esiste unica X che risolve questo sistema <u>se e solo se</u> M è invertibile.

Prendiamo $A = U_A T_A U_A^*$, $B^T = U_B T_B U_B^*$

forme di Schur (U_A, U_B unitarie, T_A, T_B upper triangular)

$$M = I_n \otimes A - B^T \otimes I_m = U_B U_B^* \otimes U_A T_A U_A^* - U_B T_B U_B^* \otimes U_A U_A^*$$

$$= \underbrace{(U_B \otimes U_A)}_{\text{unitaria}} \underbrace{(I \otimes T_A - T_B \otimes I)}_{P} \underbrace{(U_B \otimes U_A)^*}_{\text{unitaria}^*}$$

= Triangolare superiore

Sulla diagonale ho chiamiamo $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m) = \text{diag}(T_A) = \Lambda(A)$

$$(\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n) = \text{diag}(T_B) = \Lambda(B^T) = \Lambda(B)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & \\ & & & \lambda_m & & & & & & \\ & & & & \lambda_1 & & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & \lambda_m & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & \lambda_1 \\ & & & & & & & & & & \lambda_2 \\ & & & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & & & \lambda_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_1 & & & & & & & & \\ & \mu_1 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & \mu_1 & & & & & \\ & & & & \mu_2 & & & & \\ & & & & & \mu_2 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \mu_2 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & \mu_n \\ & & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & & \mu_n \end{bmatrix}$$

Sulla diagonale abbiamo le differenze $\lambda_i - \mu_j$ $\quad i = 1, \dots m$, $j = 1, \dots n$

$$\Lambda(M) = \{ \lambda_i - \mu_j, \; i=1,\dots m, \; j=1,\dots n \}$$

contiene lo 0 se e solo se ci sono un $\lambda_i \in \Lambda(A)$ e $\mu_j \in \Lambda(B)$ con $\lambda_i = \mu_j$.

Esempio Matlab: costruisco M e risolvo il sist. lineare

Problema: risolvere un sist. lineare $mn \times mn$ costa $O(m^3 n^3)$

Idea migliore: algoritmo di Bartels-Stewart

Idea: risolviamo invertendo pezzo per pezzo la dec. di Schur

$$M = (U_B \otimes U_A)\underbrace{(I \otimes T_A - T_B \otimes I)(U_B \otimes U_A)^*}$$

$$\text{vec}\, X = M^{-1} \text{vec}\, C = (U_B \otimes U_A)(I \otimes T_A - T_B \otimes I)^{-1}(U_B \otimes U_A)^* \text{vec}\, C$$

$$(U_B^* \otimes U_A^*) \cdot \text{vec}\, C = \text{vec} \boxed{\left(U_A^* C (U_B^*)^T \right)} = d$$

$$\text{costo } O(m^3+n^3) = O\left(\max(m,n)^3\right)$$

$$e = \left(I \otimes T_A - T_B \otimes I\right)^{-1} d$$ si calcola per sost. all'indietro

È triangolare superiore con $O(m^3+n^3)$ zeri

$\mathrm{vec}\, X = (U_B \otimes U_A)\, e$ si calcola come sopra.

Possiamo ottenere lo stesso algoritmo manipolando l'equazione

$$A = U_A T_A U_A^* \qquad B^T = U_B T_B U_B^* \qquad B = \overline{U_B}\, \underbrace{\overline{T_B}^T}_{L_B} U_B^T$$

$$AX - XB = C \qquad U_A T_A U_A^* X - X \overline{U_B} L_B U_B^T = C$$

Moltiplico a sx per U_A^* e a dx per $\overline{U_B}$:

$$T_A \underbrace{\boxed{U_A^* X \overline{U_B}}}_{Y} - \underbrace{\boxed{U_A^* X \overline{U_B}}}_{Y} L_B = \underbrace{\boxed{U_A^* C \overline{U_B}}}_{D}$$

Questa è un'altra eq. di Sylvester

$$T_A Y - Y L_B = D$$

con coefficienti uno triang. superiore, l'altro triang. inferiore

$$\begin{bmatrix} x & x & x & x \\ & x & x & x \\ & & x & x \\ & & & x \end{bmatrix} \underline{\begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix}} - \underline{\begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x & & \\ x & x & \\ x & x & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix}$$

Equazione che corrisponde all'elemento $(4,3)$

$$(T_A)_{44} Y_{43} - Y_{43} (L_B)_{33} = D_{43} \rightarrow Y_{43} = \frac{D_{43}}{(T_A)_{44} - (L_B)_{33}}$$

Una volta calcolato, mi calcolo quello sopra: $(3,3)$

$$(T_A)_{33} Y_{33} + (T_A)_{34} Y_{43} - Y_{33} (L_B)_{33} = D_{33}$$

$$Y_{33} = \frac{D_{33} - (T_A)_{34} Y_{43}}{(T_A)_{33} - (L_B)_{33}}$$

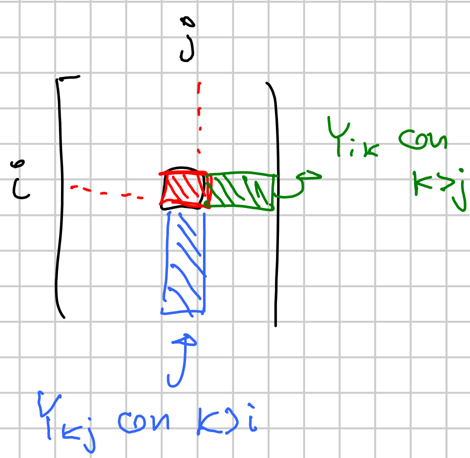
Equazione di posto (i,j):

$$\sum_{k \geq i} (T_A)_{ik} Y_{kj} - \sum_{k \geq j} Y_{ik} (L_B)_{kj} = D_{ij}$$

Isolo Y_{ij}:

$$(T_A)_{ii} Y_{ij} - Y_{ij} (L_B)_{jj} = D_{ij} - \sum_{k > i} (T_A)_{ik} Y_{kj} + \sum_{k > j} Y_{ik} (L_B)_{kj}$$

$$\boxed{Y_{ij}} = \frac{D_{ij} - \sum_{k>i} \cdots + \sum_{k>j} \cdots}{(T_A)_{ii} - (L_B)_{jj}}$$



$$\begin{bmatrix} 12 & 8 & 4 \\ 11 & 7 & 3 \\ 10 & 6 & 2 \\ 9 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Una volta calcolato Y, ottengo X da

$$Y = U_A^* X \overline{U_B} \iff X = U_A Y U_B^T$$

<u>Costo</u>: 2 forme di Schur $O(m^3)$ e $O(n^3)$

+ prodotti matrice-vettore + sostituz. all'indietro

$O(mn(m+n))$ $O(mn(m+n))$