

Equation di Sylvester

Note Title

2024-03-04

$$AX - XB = C$$

$$C, X \in \mathbb{C}^{m \times n}$$

$$A \in \mathbb{C}^{m \times m}$$

$$B \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

$$A = U_A T_A U_A^*$$

$$B^T = U_B T_B U_B^*$$

$$L_B = T_B^T$$

Tramite cambi di base:

$$AX - XB = C \Leftrightarrow T_A Y - Y L_B = D$$

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times \\ & & \times & \times \\ & & & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \times & & & \\ & \times & & \\ & & \times & \\ & & & \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

$$Y_{ij} = \frac{D_{ij} - \sum_{k>i} (T_A)_{ik} Y_{kj} + \sum_{k>j} Y_{ik} (L_B)_{kj}}{(T_A)_{ii} - (L_B)_{jj}}$$

$$\begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12 & 8 & 4 \\ 11 & 7 & 3 \\ 10 & 6 & 2 \\ 9 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Can idea simili si risolvono?

$$1) T_A Y - Y T_B = D$$

$$\nabla \nabla - \nabla \nabla = \nabla$$

2) $X - AXB = C$ ha soluz. vice $\Leftrightarrow$ non esistono $\lambda \in \Lambda(A)$
 $\mu \in \Lambda(B)$
 (eq. di Stein) tali che $\lambda\mu = 1$

3) $AXB - CXD = E$ via QZ decomposition $\begin{cases} A = Q \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Z^* \\ C = Q \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Z^* \end{cases}$

4) Non si risolve $AXB + CXD + EXF = G$ in meno di $O(m^3 n^3)$

5) Si risolve: versione reale con forme di Schur reale, lavorando a blocchi 2×2

Condizionamento delle eq. di Sylvester

Norma: $\|X\|_F = \|\text{vec } X\|_2 = \left(\sum_{i,j} |X_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

$$AX - XB = C \Leftrightarrow M \text{vec } X = \text{vec } C \quad M = I \otimes A + B^T \otimes I$$

$$\kappa(M) = \sigma_{\max}(M) / \sigma_{\min}(M)$$

$$\|M\| \leq \|I \otimes A\| + \|B^T \otimes I\| = \|A\| + \|B\|$$

$$\sigma_{\min}(M) = \min_{z \in \mathbb{C}^{mn}} \frac{\|Mz\|}{\|z\|} = \min_{z \in \mathbb{C}^{mn}} \frac{\|Az - zB\|_F}{\|z\|_F} =: \text{sep}(A, B)$$

Sappiamo calcolare

$$|\lambda_{\min}(M)| = \min_{\substack{\lambda \in \Lambda(A) \\ \mu \in \Lambda(B)}} |\lambda - \mu|$$

(autovalori di
 val. ass. più piccolo)

In generale, $\sigma_{\min}(M) \leq |\lambda_{\min}(M)|$.

Val. l'operatore se A, B simmetriche (o in gen. normali)

$$A \text{ normale} \Leftrightarrow A = U_A T_A U_A^* \text{ con } T_A \text{ diagonale}$$
$$B^T = U_B^T B U_B^*$$

produce una decomposizione

$$M = (U_B \otimes U_A) (I \otimes T_A + T_B \otimes I) (U_B \otimes U_A)^*$$

che quindi è (a meno di val. ^{diagonale} assoluti e riordinare) una SVD.

Il problema è nel continuo se A ha un autovalore vicino a un autovalore di B sicuramente, o se A, B non sono normali anche quando gli autoval. sono più lontani.

(Remark: $\text{sep}(A, B) = \text{sep}(B, A)$)

Stabilità:

Recall: la sol. all'indietro su un sistema lineare $Tx = b$ è stabile all'indietro, cioè $\tilde{x}$ calcolato floating point risolve

$$(T + \Delta_T) \tilde{x} = b + \delta_b \quad \frac{\|\Delta_T\|}{\|T\|}, \frac{\|\delta_b\|}{\|b\|} = O(u)$$

u = precisione di macchina

Prodotti per ortogonali sono stabili all'indietro e non fanno cambiare la norma

$\Rightarrow$ l'algoritmo di Bartels-Stewart produce sempre

(non vediamo dettagli) una $\tilde{X}$ tale che

$$(M + \Delta_M) \text{vec } \tilde{X} = \text{vec}(C + \Delta_C) \quad \frac{\|\Delta_M\|}{\|M\|}, \frac{\|\Delta_C\|}{\|C\|} = O(u)$$

Da questo possiamo concludere che il residuo è sempre piccolo:

$$\begin{aligned} \|M \tilde{X} - \text{vec } C\|_F &\leq \|\Delta_M\| \cdot \|\tilde{X}\| + \|\text{vec } \Delta_C\| \\ &\leq O(u) \cdot (\|M\| \cdot \|\tilde{X}\| + \|C\|) \\ &\leq O(u) ((\|A\| + \|B\|) \|\tilde{X}\| + \|C\|) \end{aligned}$$

Domanda collegata: è vero o no che $\tilde{X}$ calcolato risolve

$$(A + \Delta_A) \tilde{X} - \tilde{X} (B + \Delta_B) = C + \Delta_C, \quad \frac{\|\Delta_A\|}{\|A\|}, \frac{\|\Delta_B\|}{\|B\|}, \frac{\|\Delta_C\|}{\|C\|} = O(u)$$

?

In generale, no! Non vale una stabilità all'indietro strutturale, cioè non riesco a trovare $\Delta_M = I \otimes \Delta_A - \Delta_B^T \otimes I$.

Analizziamo questo problema. Partiamo dall'uguaglianza

$$(A + \Delta_A) \tilde{X} - \tilde{X} (B + \Delta_B) = C + \Delta_C$$

La riscriviamo come

$$\color{red}{A} \tilde{X} - \tilde{X} \color{green}{B} - \Delta_C = \underbrace{C - A \tilde{X} + \tilde{X} B}_R, \text{ residuo}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{X}^T \otimes \color{red}{I} & -\color{green}{I} \otimes \tilde{X} & -I \end{bmatrix}}_S \begin{bmatrix} \text{vec } \Delta_A \\ \text{vec } \Delta_B \\ \text{vec } \Delta_C \end{bmatrix} = \text{vec } R$$

L'errore all'istante è la norma del vettore $\begin{bmatrix} \text{vec } \Delta A \\ \text{vec } \Delta B \\ \text{vec } \Delta C \end{bmatrix}$

più piccolo che risolve questo sistema di q. lineari.

Restringiamoci per semplicità al caso $m=n$: allora il sist. lineare è

$$n^2 \times 3n^2 \cdot 3n^2 = n^2$$

S
 $\begin{bmatrix} \text{vec } \Delta A \\ \text{vec } \Delta B \\ \text{vec } \Delta C \end{bmatrix} \text{vec } R$

La soluzione di minima norma è

$$\begin{bmatrix} \text{vec } \Delta A \\ \text{vec } \Delta B \\ \text{vec } \Delta C \end{bmatrix} = S^+ \text{vec } R \quad S^+ = S^T (S \cdot S^T)^{-1}$$

S ha una sottomatr. identità e lo sempre rango pieno.

Studiamo i val. singolari di S. A uno di multipl. per matrici ortogonali, possiamo supporre che

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \sigma_n \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} \tilde{X}^* \otimes I & -I \otimes \tilde{X} & -I \end{bmatrix}$$

$$SS^T = \begin{bmatrix} \tilde{X}^* \otimes I & -I \otimes \tilde{X} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X} \otimes I \\ -I \otimes \tilde{X} \\ -I \end{bmatrix}$$

$$= \tilde{X}^2 \otimes I + I \otimes \tilde{X}^2 + I$$

Sulla diagonale ho elementi del tipo $\sigma_i^2 + \sigma_j^2 + 1 \quad \begin{matrix} i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n \end{matrix}$

I valori sing. di S sono $\left\{ \sqrt{G_i^2 + G_j^2 + 1} \right\}_{i=1..n, j=1..n}$

$$\|S^+\| = \frac{1}{G_{\min}(S)} = \frac{1}{\sqrt{2G_n^2 + 1}}$$

Mettendo tutto insieme

$$\left\| \begin{bmatrix} \text{vec } \Delta A \\ \text{vec } \Delta B \\ \text{vec } \Delta C \end{bmatrix} \right\| \leq \|S^+\| \cdot \|\text{vec } U\| \leq \frac{1}{\sqrt{2G_n^2 + 1}} \left((\|A\| + \|B\|) G_1 + \|C\| \right) o(u)$$

errore all'indietro

Purtroppo, quando $G_1 \gg 1$ $G_n \approx 1$ $\|A\|, \|B\|, \|C\| = o(1)$
 questo errore all'indietro è $\gg o(u)$.

[Higham, '93, con anche esempio 2×2]

Osservazione: le matrici

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

sono simili se e solo se $\lambda \neq \mu$.

Riusciamo anche a trovare una matrice che realizza la similarità:

$$\begin{bmatrix} 1 & -C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

↪ inverse l'una dell'altra ↪

$$\stackrel{\text{LHS}}{=} \begin{bmatrix} \lambda & 1-C\mu \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda C + 1 - C\mu \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

se $C = \frac{-1}{\lambda - \mu}$
 l'elemento $(1,2)$ viene 0

Le eq. di Sylvester mostrano una versione a blocchi di questa identità:

$$\begin{bmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

A, B blocchi quadrati $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$$\text{LHS} = \begin{bmatrix} A & C - XB \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & AX - XB + C \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

Il blocco (2,1) è 0 se X risolve l'eq. di Sylvester
 $AX - XB = -C$

Quando $\Lambda(A) \cap \Lambda(B) = \emptyset$, riesca a trovare una soluzione X e trovare esplicitamente una matrice di similitudine che trasforma $\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$

Quando A, B hanno autovel. vicini, $\text{sep}(A, B)$ è piccolo, e mi serve una trasformazione con $\|X\|$ grande, quindi mal condizionata, per diagonalizzare o blocchi.

Sottospazi invarianti di una matrice.

Sia M diagonalizzabile $M = V \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} V^{-1}$

v_i colonna i -esima di V è un autovettore di autovel. λ_i

Il sottospazio invariante associato a un certo sottoinsieme

degli autovettori $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ è

$$\text{span} \{v_1, v_2, \dots, v_k\},$$

Analogamente, il sottosp. invariante associato a una regione $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ è quello associato a $\Omega \cap \Lambda(M)$.

Quando M ha autovettori multipli, vogliamo prendere tutti gli autovettori v_i associati a λ_i relativi

Difetti, se per esempio $\lambda_1 = \lambda_2$ v_1, v_2 non sono ben definiti in termini della sola M , è ben definito solo l'autospazio $V_\lambda = \text{span} \{v_1, v_2\}$

Se M è una matrice non diagonalizzabile, possiamo generalizzare questa definizione. Prendiamo

$$M = V \cdot J \cdot V^{-1} \text{ forme di Jordan}$$

Le colonne v_i di V sono vettori che formano le cosiddette catene di Jordan. In particolare, se prendo tutti gli indici i associati a blocchi con un certo $\lambda \in \mathbb{C}$ come autovettore, ottengo

$$\begin{aligned} & \text{span} \{v_i : i \text{ in blocco con autovel. } \lambda\} = \\ & = V_\lambda = \{w : (M - \lambda I)^k w = 0 \text{ per qualche } k\} \end{aligned}$$

Def: il sottospazio invariante di M associato a un certo sottoinsieme $S \subseteq \Lambda(M)$ $S = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$

$$V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \dots + V_{\lambda_k}$$

$$\mathcal{V} = \{ v : \lim_{k \rightarrow \infty} M^k v = 0 \}$$