Sottospazi invarianti

$M \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$$V_\lambda = \{ w \in \mathbb{C}^n : (M - \lambda I)^k w = 0 \}$$

$$M = V J V^{-1} \qquad J = \begin{bmatrix} \square & & & & \\ & \square & & & \\ & & \square & & \\ & & & \square & \\ & & & & \square \end{bmatrix} \qquad V = \begin{bmatrix} | & | & | & | \end{bmatrix}$$

$V_\lambda = \text{span}(v_i : i$ sta in un blocco con autoval. $\lambda)$

Esempio

$$V = \{ w \in \mathbb{C}^n : \lim_{k \to \infty} M^k w = 0 \}$$

associato ad es. al sistema dinamico discreto

$$\begin{cases} w_0 = w \\ w_{k+1} = M w_k \end{cases}$$

Prop: V è il sottosp. invariante associato all'interno del disco unitario $D = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \}$

cioè $V = V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \dots + V_{\lambda_k}$ (somma di autosp. generalizzati)

dove $\{\lambda_1, \dots \lambda_k\} = \Lambda(M) \cap D$

Dim: Prendiamo una forma di Jordan

$$M = V J V^{-1} \qquad J = \begin{array}{c c} \begin{array}{cc} n_1 & n_2 \end{array} & \\ \left[\begin{array}{c|c} J_1 & \\ \hline & J_2 \end{array}\right] & \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \end{array} \end{array} \qquad V = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} n_1 & n_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} V_1 & V_2 \end{array}\right] \end{array}$$

con $\Lambda(J_1) \subseteq D$, $\Lambda(J_2) \cap D = \emptyset$

Il sottosp. inv. $\mathcal{V}$ è $\operatorname{Im} V_1$

Vogliamo dimostrare che:

1) $w \in \operatorname{Im} V_1 \Rightarrow \lim_{k \to \infty} M^k w = 0$

2) $w \notin \operatorname{Im} V_1 \Rightarrow \lim_{k \to \infty} M^k w \neq 0$

Dim. 1) $$w = V_1 c_1 = \left[V_1 \,\middle|\, V_2 \right] \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Allora $$M^k w = \underbrace{V \begin{bmatrix} J_1^k & \\ & J_2^k \end{bmatrix} V^{-1}} \; \underbrace{V \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \end{bmatrix}} = V \begin{bmatrix} J_1^k c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

J_1 matrice di Jordan con blocchi della forma $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$

e $|\lambda| < 1 \Rightarrow J_1^k \to 0$ e $M^k w \to 0$

Dim 2) $$w = \left[V_1 \,\middle|\, V_2 \right] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \qquad c_2 \neq 0$$

Allo stesso modo,
$$M^k w = V \begin{bmatrix} J_1^k & \\ & J_2^k \end{bmatrix} V^{-1} V \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = V \begin{bmatrix} J_1^k c_1 \\ J_2^k c_2 \end{bmatrix}$$

Prendiamo m come il più grande indice t.c. $(c_2)_m \neq 0$

L'entrata m-esima di $$(J_2^k c_2)_m = \lambda^k (c_2)_m$$

$\uparrow$ autoval. nell'entrata $(J_2)_{mm}$

$\Downarrow$

$c_2 \neq 0$ $|\lambda| \geq 1$, quindi $\lambda^k (c_2)_m$ non tende a 0. $\square$

Oss: se prendo $w = V_1 c_1$, allora $Mw = V_1 \cdot (J_1 c_1)$

$w \in \operatorname{Im} V_1 \Rightarrow Mw \in \operatorname{Im} V_1$

$w \in V \Rightarrow Mw \in V$

questo motiva il nome "invariante".

Domanda: questi sono tutti i sottospazi "M-invarianti" o no?

No! Esempio: $M = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad V_1 = \mathbb{C}^2$

però $V = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ è invariante.

Esempio: $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad V_2 \in \mathbb{C}^3$

però, $\operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ e $\operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ sono M-invarianti.

Per dimostrarlo, prendiamo in generale una matrice triangolare a blocchi

$$M = \begin{array}{c|cc} & n_1 & n_2 \\ \hline n_1 & A & C \\ n_2 & 0 & B \end{array} \qquad A \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_1} \quad B \in \mathbb{C}^{n_2 \times n_2}$$

$\operatorname{span} \begin{bmatrix} I_{n_1} \\ 0 \end{bmatrix}$ è invariante: difatti

$$M \cdot \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} A \Rightarrow M \cdot \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} c_1 = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} (A c_1)$$

e $\left[\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & & 2 \end{array}\right]$, $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$ è triang. a blocchi.

Oss: $M\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} A \qquad M\big|_{\operatorname{Im}\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}} : \operatorname{Im}\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \to \operatorname{Im}\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$,

e la matrice che rappresenta la restrizione di questo operatore lineare (in basi opportune) è proprio A.

Oss: la stessa cosa non vale per $\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ B \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}\cdot \text{qualcosa}, \quad \text{se } C \neq 0.$$

In generale, possiamo studiare i sottospazi invarianti usando decomposizioni triangolari a blocchi al posto delle forme di Jordan. Se ho

$$M = \begin{array}{cc} n_1 & n_2 \\ \multicolumn{2}{c}{\left[\, U_1 \,\middle|\, U_2 \,\right]} \end{array} \begin{array}{cc} n_1 & n_2 \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}} \end{array} \begin{array}{cc} n_1 & n_2 \\ \multicolumn{2}{c}{\left[\, U_1 \,\middle|\, U_2 \,\right]^{-1}} \end{array}, \qquad (*)$$

allora $M \cdot U_1 = U_1 \cdot A$ e $M \cdot (\operatorname{Im} U_1) \subseteq \operatorname{Im} U_1$

$$\underbrace{\square}_{n\times n}\ \underbrace{\square}_{n\times n_1} = \underbrace{\square}_{n\times n_1}\ \underbrace{\square}_{n_1\times n_1}$$

Teorema: Supponiamo di avere una decomposizione della forma $(*)$, con $\Lambda(A) \cap \Lambda(B) = \emptyset$.
Allora, $\operatorname{Im} U_1$ è il sottosp. invariante di M associato agli autovalori $\Lambda(A)$.

Dim: $\Lambda(M) = \Lambda(A) \cup \Lambda(B)$, perché $(*)$ è una similitudine.

Prendiamo un autovett. generalizzato di M, cioè w t.c.
$$(M - \lambda I)^k w = 0 \qquad \lambda \in \Lambda(A).$$ Scriviamo
$$w = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = U_1 c_1 + U_2 c_2$$

e vogliamo dimostrare che $c_2 = 0$

$$(M-\lambda I)^k = [U_1 \ U_2]\left(\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} - \lambda I\right)^k [U_1 \ U_2]^{-1}$$

$$= [U_1 \ U_2]\begin{bmatrix} (A-\lambda I)^k & \hat{C} \\ 0 & (B-\lambda I)^k \end{bmatrix}[U_1 \ U_2]^{-1}$$

$$0 = (M-\lambda I)^k w = [U_1 \ U_2]\begin{bmatrix} (A-\lambda I)^k & \hat{C} \\ 0 & (B-\lambda I)^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$0 = \underbrace{[U_1 \ U_2]}_{\text{invertibile}}\underbrace{\begin{bmatrix} * \\ (B-\lambda I)^k c_2 \end{bmatrix}}$$

Perché questo succeda, devo avere $\begin{bmatrix} * \\ \underbrace{(B-\lambda I)^k}_{\text{invertibile}} c_2 \end{bmatrix} = 0$

Quindi devo avere $c_2 = 0 \Rightarrow w = U_1 c_1 + U_2 c_2 = U_1 c_1$

$\Rightarrow \mathcal{V} \subseteq \operatorname{Im} U_1$

L'altra inclusione viene per motivi di dimensione $(\dim \operatorname{Im} U_1 = \dim \mathcal{V} = n_1)$

Come calcolare (basi di) sottospazi invarianti?
Con una forma di Schur:
se scrivo $M = UTU^{-1} = [U_1 \ U_2]\begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix}[U_1 \ U_2]^{-1}$

allora le colonne di U_1 sono una base del sottosp. invariante associato a $\Lambda(T_{11})$.

Domanda: come faccio a ottenere una forma di Schur che ha in $\Lambda(T_{11})$ il sottoinsieme dello spettro che mi interessa?

Riordinare forme di Schur

<u>Idea</u>: data $M = UTU^*$ forma di Schur, mostriamo come calcolarne un'altra con gli autovalori in ordine diverso sulla diagonale.

<u>Idea</u>: ci basta saper <u>scambiare</u> due blocchi di autovalori: data

$$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

mostro come costruire Q t.c.

$$Q \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} Q^* = \begin{bmatrix} \hat{B} & \hat{C} \\ 0 & \hat{A} \end{bmatrix} \qquad (**)$$

con $\Lambda(B) = \Lambda(\hat{B})$, $\Lambda(A) = \Lambda(\hat{A})$.

Se so fare questo, so anche riordinare

$$\begin{bmatrix} I & & \\ & Q & \\ & & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & * & * & * \\ & T_{22} & * & * \\ & & T_{33} & * \\ & & & T_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & & \\ & Q & \\ & & I \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} T_{11} & * & * & * \\ 0 & \hat{T}_{33} & * & * \\ 0 & 0 & \hat{T}_{22} & * \\ 0 & 0 & 0 & T_{44} \end{bmatrix}.$$

Ci concentriamo poi su $(**)$

<u>Idea</u>: riguardo alcuni conti fatti con eq. di Sylvester

$$AX - XB = C \iff \quad \text{se } \Lambda(A) \cap \Lambda(B)$$

$$\begin{bmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

Moltiplico a sx e dx per $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e ottengo

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$$

una l'inversa dell'altra

Questa matrice $\begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ non è ortogonale, però posso calcolarne la fattorizzazione QR:

$$Q \cdot R = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Inserendo nell'equazione sopra,

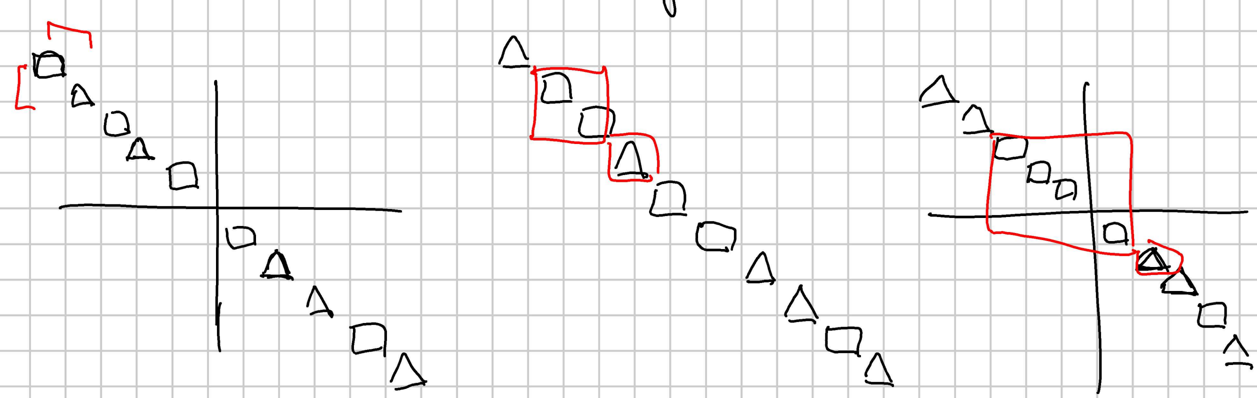
$$R^{-1} Q^* \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} QR = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$$

$$Q^* \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} Q = R \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} R^{-1} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_{11}^{-1} & * \\ 0 & R_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} R_{11} B R_{11}^{-1} & * \\ 0 & R_{22} A R_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

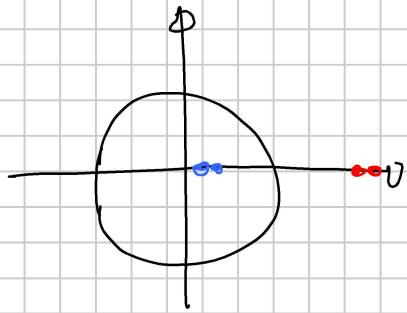
Se A, B tr. sup., anche $\hat{B} = R_{11} B R_{11}^{-1}$, $\hat{A} = R_{22} A R_{22}^{-1}$ lo sono.

Vantaggio di questo algoritmo: stabilità all'indietro, visto che si basa su trasformazioni ortogonali.



Condizionamento del calcolo di sott. invarianti.

Sappiamo che il calcolo di autovalori, autovettori è mal condizionato se gli autovalori sono vicini tra loro



Però, un sottosp. invariante (ad es. span(autovettori associati a ∘∘)) potrebbe essere meglio condizionato.

Vedremo nella prossima lezione che il condizionamento di un sottosp. invariante $\operatorname{Im} U_1$ con

$$M = \left[U_1 | U_2 \right] \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \left[U_1 | U_2 \right]^{-1}$$

$[U_1, U_2]$ ortogonale è dato proprio da l'inverso di $\operatorname{sep}(A,B)$

$$= \min_{Z \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2}} \frac{\|AZ - ZB\|_F}{\|Z\|_F} \leq \min\left\{ |\lambda - \mu| \; : \; \lambda \in \Lambda(A),\ \mu \in \Lambda(B) \right\}$$