Condizionamento di sottospazi invarianti

$$M = U \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} n_1 & n_2 \end{array} \\ & \left[\begin{array}{cc} A & C \\ 0 & B \end{array}\right] \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \end{array} \end{array} U^{-1}$$

A, B quadrati

$$U = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} n_1 & n_2 \end{array} \\ \left[U_1 \; U_2 \right] \end{array} \Rightarrow \operatorname{Im} U_1 \text{ è un sottospazio invariante.}$$

Se perturbiamo

$$\tilde{M} = M + \Delta_M ,$$

allora ci aspettiamo di avere un sottosp. invariante $\operatorname{Im} U_1 + \Delta_{U_1}$

Quanto vale $\displaystyle \limsup_{\|\Delta_M\| \to 0} \frac{\|\Delta_U\|}{\|\Delta_M\|}$

Possiamo supporre a meno di cambi di base ortonormali

$U = I \qquad U_1 = \begin{bmatrix} I_{n_1} \\ 0 \end{bmatrix}$.

<u>Teo</u>: Sia $M = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$, $\Delta_M = \begin{bmatrix} \Delta_A & \Delta_B \\ \Delta_D & \Delta_C \end{bmatrix}$

e $\|\Delta_A\|_F = a \quad \|\Delta_B\|_F = b, \ \|\Delta_C\|_F = c, \ \|\Delta_D\|_F = d$

Se $\operatorname{sep}(A,B) - a - b > 0$ e se

$$(\operatorname{sep}(A,B) - a - b)^2 - 4d(\|C\| + c) \geq 0,$$

allora esiste (unica) una matrice X di norma

$\|X\|_F \leq \dfrac{2d}{\operatorname{sep}(A,B) - a - b}$ tale che $\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}$ è la base di un sottosp. invariante di $M + \Delta_M$.

Le due condizioni equivalgono a "perturb. sufficientemente piccola".

e $\quad \|X\|_F \leq \dfrac{2\|\Delta_M\|_F}{\text{sep}(A,B)} + o(\|\Delta_M\|_F)$

Dim: $\quad M+\Delta_M = \begin{bmatrix} * & * \\ \Delta_D & * \end{bmatrix}$

Vogliamo fare un cambio di base con una matrice triang. a blocchi per rimettere uno zero nel blocco (2,1)

$$\boxed{*} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -X & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A+\Delta_A & C+\Delta_C \\ \Delta_D & B+\Delta_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ X & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$$

$\left(M+\Delta M = U \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix} U^{-1}, \ U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ X & 1 \end{bmatrix}, \text{ e quindi } \begin{bmatrix} 1 \\ X \end{bmatrix} \text{ è la base di un sott. invariante} \right)$

Calcoliamo il prodotto:

$$\boxed{*} = \begin{bmatrix} * & * \\ -X(A+\Delta_A)+\Delta_D & -X(C+\Delta_C)+B+\Delta_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ X & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} * & * \\ -X(A+\Delta_A)+\Delta_D-X(C+\Delta_C)X+(B+\Delta_B)X & * \end{bmatrix}$$

Per avere una matrice triang. sup. a blocchi, devo avere

$$\underline{X(A+\Delta_A)-(B+\Delta_B)X} = \Delta_D - X(C+\Delta_C)X.$$

È un'equazione matriciale non lineare (equazione di Riccati algebrica). Vorremmo dimostrare l'esistenza di una soluzione X suff. piccola di questa equazione.

Consideriamo l'operatore che corrisponde al pezzo lineare:

$$\operatorname{vec}\left(X(A+\Delta_A)-(B+\Delta_B)X\right)=\underbrace{\left((A+\Delta_A)^T\otimes I-I\otimes(B+\Delta_B)\right)}_{:=\tilde{T}}\operatorname{vec}X$$

È una versione perturbata di

$$T:=A^T\otimes I-I\otimes B$$

Si ha

$$\|T^{-1}\|^{-1}=\sigma_{min}\left(A^T\otimes I-I\otimes B\right)=\operatorname{sep}(B,A)=\operatorname{sep}(A,B)$$

$$\|\tilde{T}^{-1}\|^{-1}=\sigma_{min}\left((A+\Delta_A)^T\otimes I-I\otimes(B+\Delta_B)\right)\geqslant \operatorname{sep}(A,B)-a-b$$

che segue dal risultato di perturbazione generale

$$\sigma_{min}(T+E)\geqslant\sigma_{min}(T)-\|E\|. \qquad \forall\, T,E$$

Vettorizzando l'eq. di Riccati, ho

$$\tilde{T}\cdot\operatorname{vec}X=\operatorname{vec}\left(X(A+\Delta_A)-(B+\Delta_B)X\right)=\operatorname{vec}\left(\Delta_D-X(C+\Delta_C)X\right)$$

$$\underbrace{\operatorname{vec}X}_{x}=\underbrace{\tilde{T}^{-1}\cdot\operatorname{vec}\left(\Delta_D-X(C+\Delta_C)X\right)}_{=\Phi(x)}$$

$$\|\Phi(x)\|\leqslant\|\tilde{T}^{-1}\|_2\left(\|\Delta_D\|_F+\|X\|_F\left(\|C\|_F+\|\Delta_C\|_F\right)\cdot\|X\|_F\right)$$

In particolare, se ho $\|X\|_F\leqslant r$ allora

$$\|\Phi(x)\|\leqslant\|\tilde{T}^{-1}\|_2\left(d+r^2\left(\|C\|_F+c\right)\right)\leqslant\frac{1}{\operatorname{sep}(A,B)-a-b}\left(d+r^2\left(\|C\|_F+c\right)\right)$$

Ora voglio trovare un r che soddisfi

$$r=\frac{1}{\operatorname{sep}(A,B)-a-b}\left(d+r^2\left(\|C\|_F+c\right)\right): \qquad (**)$$

se questo succede, allora ho dimostrato che

$\|x\| \leq r \Rightarrow \|\Phi(x)\| \leq r$

Cioè, l'operatore Φ manda la palla $B(0,r)$ in sé.

Questo ci permette di concludere che c'è un punto fisso (teorema di Brouwer: ogni Φ continua da una palla in sé ha un punto fisso).

Il punto fisso soddisfa

$$X = \tilde{T}^{-1}\left(\Delta_D - X\left(C + \Delta_C\right)X\right)$$

$\Leftrightarrow$ equazione di Riccati

$\Rightarrow \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}$ è una base di un sott. invariante di $M + \Delta_M$.

Ci manca di trovare un r che soddisfi (**)

$$r = \frac{1}{\operatorname{sep}(A,B) - a - b}\left(d + r^2\left(\|C\|_F + c\right)\right):$$

è un'equaz. di secondo grado in r:

$$\alpha - \beta r + \gamma r^2 = 0 \qquad \text{con} \quad \beta = \operatorname{sep}(A,B) - a - b > 0$$

$$\gamma = \|C\|_F + c \geq 0$$

$$\alpha = d \geq 0$$

Invece di questa equazione, consideriamo l'equazione per $s = \frac{1}{r}$

$$\alpha s^2 - \beta s + \gamma = 0$$

Questa ha soluzioni

$$s_\pm = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}, \quad \text{reali se } \boxed{\beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0,}$$

condizioni nel testo del teorema.

e la più grande $s_{max} \geq \frac{\beta}{2\alpha}$.

Quindi esiste $\boxed{r_{min} \leq \frac{2\alpha}{\beta}}$. □

Funzioni di matrici

Dato un polinomio scalare $p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_d x^d$

$$p(A) = c_0 I + c_1 A + c_2 A^2 + \dots + c_d A^d$$

Vogliamo dare una formula per calcolare $p(A)$ in termini della forma di Jordan di A.

Partiamo da casi semplici.

1) $J_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{k \times k}$ $\qquad J_0^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$

$$p(J_0) = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{k-1} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & c_2 \\ & 0 & & \ddots & c_1 \\ & & & & c_0 \end{bmatrix} \qquad J_0^{k-1} = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \qquad J_0^k = 0$$

triangolare di Toeplitz $\qquad$ (ponendo $c_i = 0$ se $i > d$).

2) $J_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$

$$p(J_\lambda) = \begin{bmatrix} p(\lambda) & p'(\lambda) & \frac{1}{2}p''(\lambda) & \cdots & \frac{1}{(k-1)!}p^{(k-1)}(\lambda) \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & p'(\lambda) \\ & & & & p(\lambda) \end{bmatrix}$$

poiché

$$p(x) = p(\lambda) + p'(\lambda)(x-\lambda) + \frac{p''(\lambda)}{2}(x-\lambda)^2 + \dots \frac{p^{(d)}(\lambda)}{d!}(x-\lambda)^d$$

$$p(J_\lambda) = p(\lambda) I + p'(\lambda)\underbrace{(J_\lambda - \lambda I)}_{= J_0} + \frac{p''(\lambda)}{2}\underbrace{(J_\lambda - \lambda I)^2}_{J_0^2} + \dots + \frac{p^{(d)}(\lambda)}{d!}\underbrace{(J_\lambda - \lambda I)^d}_{J_0^d}$$

3)

$$A = V \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{bmatrix} V^{-1}$$

Allora
$$p(A) = V \begin{bmatrix} p(J_1) & & & \\ & p(J_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & p(J_k) \end{bmatrix} V^{-1}$$

Posso generalizzare queste formule per definire $f(A)$ per una funzione qualunque A:

$$f(A) \underset{\text{def}}{:=} V \begin{bmatrix} f(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(J_k) \end{bmatrix} V^{-1}, \quad f(J_i) = \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(k_i-1)!} f^{(k_i-1)}(\lambda_i) \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & f'(\lambda_i) \\ 0 & & & f(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

Diciamo che f è <u>definita</u> in A se è differenziabile $k_i - 1$ volte in ogni autovalore λ_i di A con blocco di Jordan di dimensione k_i

<u>Possibile problema</u>: la matrice V non è unica, in una forma di Jordan.
Per essere ben posta, la definizione non dovrebbe dipendere dalla V. Per mostrare che così succede, introduciamo una definizione alternativa di funzione di matrice.

Per definire $f(A)$, troviamo un polinomio $p(x)$ tale che

$$f(\lambda_i) = p(\lambda_i), \quad f'(\lambda_i) = p'(\lambda_i), \quad \ldots \quad f^{(k_i-1)}(\lambda_i) = p^{(k_i-1)}(\lambda_i)$$

per ogni blocco di Jordan J_i con autoval. λ_i e dim. $k_i \times k_i$,

e poniamo $f(A) := p(A)$.

Questo valore <u>non</u> dipende da p, perché $p(A)$ dipende solo dai valori $p(\lambda_i), p'(\lambda_i), \dots p^{(k_i-1)}(\lambda_i)$.

E non dipende neppure da V, perché non compare in questa definizione.

<u>Esempio</u>:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & & \\ & 4 & 1 & \\ & & 4 & \\ \hline & & & 0 \end{array}\right] \qquad f(x) = \sqrt{x}$$

Proviamo ad applicare quest'ultima definizione. Cerchiamo un polinomio tale che

$$p(4) = \sqrt{4} = 2 \qquad p'(4) = f'(4) = \frac{1}{4} \qquad p''(4) = f''(4) = -\frac{1}{32}.$$

$$p(0) = \sqrt{0} = 0.$$

$$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4^2 & 4^3 \\ 0 & 1 & 2\cdot 4 & 3\cdot 4^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6\cdot 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1/4 \\ -1/32 \\ 0 \end{bmatrix}$$

<u>Nota</u>: $f(A)^2 = A$

"Non-esempio":

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad f(x) = \sqrt{x}$$

Mi servirebbe $f'(0)$ per applicare la definizione, ma non esiste.

Questo torna, perché l'equazione $X^2 = A$ non ha soluzioni $X \in \mathbb{C}^{2\times 2}$

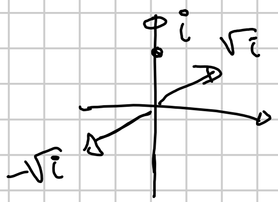
X deve avere autovalori uguali a 0, quindi può avere forma di Jordan

$$\boxed{X = V \cdot \begin{bmatrix} 0 & \\ & 0 \end{bmatrix} V^{-1}} \quad \text{oppure} \quad \boxed{X = V \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^{-1}}$$

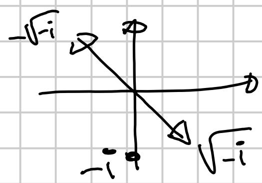
$\boxed{\Rightarrow X=0 \Rightarrow X^2=0 \text{ no!}}$ $\qquad$ $\boxed{\Rightarrow X^2 = V\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}^2 V^{-1}=0}$

Esempio: $A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$ $\qquad \Lambda(A)=\{\pm i\}$ $\qquad f(x)=\sqrt{x}$

Dobbiamo specificare il ramo di $\sqrt{x}$ che scegliamo.
Scegliamo la cosiddetta radice quadrata principale, cioè quella che ha valori nel semipiano destro



$$\sqrt{i}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$$



$$\sqrt{-i}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

Cerchiamo un polinomio che soddisfi $\begin{cases} p(i)=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i \\ p(-i)=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i \end{cases}$

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}x$$

$$p(A)=\frac{1}{\sqrt{2}}I+\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

ES: Calcoliamo la funzione che corrisponde a un ramo diverso della radice:

$A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$ $\qquad f(x)=\sqrt{x}$ nel ramo t.c. $\quad f(i)=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$, $\quad f(-i)=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$

(Verrà una matrice non reale, perché $f(i)$ e $f(-i)$ non sono complessi coniugati)

(Verrà comunque una matrice tale che $X^2=A$)

Dimostriamo che esistono sempre polinomi di interpolazione:

Teo (Hermite interpolation)

Dati punti distinti $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n \in \mathbb{C}$,
molteplicità $m_1, m_2, \dots m_n \in \mathbb{Z}_+$,
e valori $y_{i,j}$, esiste uno e un solo polinomio di grado $d < m_1 + m_2 + \dots + m_n$ tale che

$$p(\lambda_i) = y_{i,0} \quad p'(\lambda_i) = y_{i,1} \quad p''(\lambda_i) = y_{i,2}, \dots p^{(m_i-1)}(\lambda_i) = y_{i,m_i-1}$$

$i = 1, 2, \dots n$

Dim: nei termini dei coefficienti di p, $c_0, c_1, \dots c_{d-1}$, corrisponde a un sistema lineare quadrato

$$V \cdot c = y.$$

Vogliamo dimostrare che V sia invertibile.
Supponiamo per assurdo $V \cdot z = 0$, $z \in \mathbb{C}^d \neq 0$.
e guardiamo il polinomio $z_1 + z_2 x + \dots + z_d x^{d-1} = z(x)$.

$$V \cdot z = 0 \iff z(\lambda_i) = 0 \quad z'(\lambda_i) = 0 \quad \dots \quad z^{m_i-1}(\lambda_i) = 0 \quad \forall i$$

$\iff z(x)$ ha uno zero di molteplicità m_i in λ_i

$\iff z(x)$ è un multiplo di $(x-\lambda_1)^{m_1} (x-\lambda_2)^{m_2} \cdots (x-\lambda_n)^{m_n}$

$z(x)$ ha grado $< m_1 + \dots + m_n \Rightarrow$ dev'essere $z(x) = 0$. $\square$