Note Title 2024-03-18

Funzioni di matrici

$$A = VJV^{-1} \qquad J = \mathrm{diag}(J_1, J_2, \dots, J_b)$$

$$f(A) = V \,\mathrm{diag}(f(J_1), \dots f(J_b))\, V^{-1}$$

$$f(J_i) = f\left(\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(k_i-1)!} f^{(k_i-1)}(\lambda_i) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & f'(\lambda_i) \\ 0 & & & f(\lambda_i) \end{bmatrix} \qquad (*)$$

$f(A) = p(A)$ $\quad$ p polinomio t.c.

$$f(\lambda_i) = p(\lambda_i)$$
$$f'(\lambda_i) = p'(\lambda_i)$$
$$\vdots$$
$$f^{(k_i-1)}(\lambda_i) = p^{(k_i-1)}(\lambda_i)$$

cioè tutte le derivate che mi servono nella $(*)$.

<u>ES</u>:

$$A = V \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix} V^{-1}$$

$$\exp(A) = V \begin{bmatrix} e^{-1} & & & \\ & e & & \\ & & e & e \\ & & & e \end{bmatrix} V^{-1}$$

blocchi ripetuti $\Rightarrow$ meno condizioni, ma comunque consistenti.

Questa definizione coincide con $\exp(A) = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots$?

<u>Teo</u>: [Higham, thm. 4.7]

Supponiamo di avere $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-\alpha)^k$

$c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(\alpha)$, funzione analitica, con raggio di convergenza della serie di Taylor r.

Allora, per ogni matrice A con $\Lambda(A) \subseteq \{z : |z-\alpha| < r\}$

$$\lim_{d \to \infty} \sum_{k=0}^{d} c_k (A-\alpha I)^k = f(A).$$

Dim: Ci basta dimostrarlo sui blocchi di Jordan, visto che

$$f(A) = V \begin{bmatrix} f(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(J_b) \end{bmatrix} V^{-1}.$$

e definendo $p_d(x) = \sum_{k=0}^{d} c_k (A-\alpha I)^k$ si ha

$$LHS = p_d(A) = V \begin{bmatrix} p_d(J_1) & & & \\ & p_d(J_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_d(J_b) \end{bmatrix} V^{-1}.$$

Prendiamo un blocco J_i con autovalore λ_i.
Sulla diagonale di $p_d(J_i)$ abbiamo semplicemente

$$p_d(\lambda_i) = \sum_{k=0}^{d} c_k \lambda_i^k \quad \text{e} \quad \lim_{d \to \infty} p_d(\lambda_i) = f(\lambda_i)$$

Sulla j-esima sopradiagonale di $p_d(J_i)$ ho

$\frac{1}{j!} p_d^{(j)}(\lambda_i)$, che è uguale al polinomio di Jordan troncato al grado $d-j$ di $\frac{1}{j!} f^{(j)}(x)$.

Dall'analisi, sappiamo che le derivate di una serie di potenze ha lo stesso raggio di convergenza della serie originale.
Quindi valutando in λ_i che sta nel raggio di convergenza

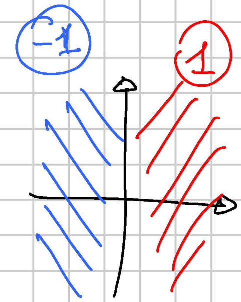
$$\left[j\text{-esima sopradiag. di } p_d(J_i)\right] = \frac{1}{j!}\, p_d^{(j)}(\lambda_i)$$

converge per $d \to \infty$ a $\frac{1}{j!} f^{(j)}(\lambda_i)$

$$= \left[j\text{-esima sopradiag. di } f(J_i)\right]. \qquad \square$$

ES: $f(x) = \mathrm{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } \mathrm{Re}(x) < 0 \\ 1 & \text{se } \mathrm{Re}(x) > 0 \end{cases}$

(non def. su $\mathrm{Re}(x) = 0$)



Dato A che non ha autovalori immaginari puri, possiamo definire $\mathrm{sign}(A)$: scriviamo

$$A = V \left[\begin{array}{c|c} J_1 & \\ \hline & J_2 \end{array}\right] V^{-1}$$

con J_1 che include tutti i blocchi con $\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0$, J_2 quelli con $\mathrm{Re}\,\lambda_i > 0$.

$$\mathrm{sign}(A) = V \left[\begin{array}{c|c} -1 & \\ \hline & 1 \end{array}\right] V^{-1}$$

Se $\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0$, $\mathrm{sign}\left(\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}\right) =$

$$= \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(k_i-1)!} f^{(k-1)}(\lambda_i) \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \end{bmatrix}$$

$= -I$

Volta scorsa: esempi con $f(x) = \sqrt{x}$, e abbiamo visto che producono funzioni $X = f(A)$ che risolvono $X^2 = A$.

Domanda: scegliendo opportunamente rami di $\sqrt{x}$, questo produce tutte le soluzioni di $X^2 = A$?

Non sempre, per colpa degli autovalori multipli.

Ad esempio,
$$A = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & & \\ & -\sqrt{2} & \\ & & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Questa soddisfa $X^2 = A$, però non si ottiene come $p(A)$ per nessun polinomio $p(x)$ (a coeff. scalari)

$$p(A) = \begin{bmatrix} p(2) & & \\ & p(2) & \\ & & p(3) \end{bmatrix} \qquad \text{quindi} \quad [p(A)]_{1,1} = [p(A)]_{2,2}.$$

Data una funzione "multi-valued" come $\sqrt{x}$, $\log(x)$, ... a volte si definiscono funzioni non primarie di una matrice A quelle ottenute come

$$f(A) = f(VJV^{-1}) = V \begin{bmatrix} f_1(J_1) & & & \\ & f_2(J_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f_b(J_b) \end{bmatrix} V^{-1},$$

dove $f_1, f_2, \dots f_b$ sono rami possibilmente diversi di f.

$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Se X risolve $X^2 = A$, allora ha un autovalore uguale a $\pm i$ e uno uguale a ± 1

Quindi $X = V \begin{bmatrix} \pm i & \\ & \pm 1 \end{bmatrix} V^{-1}$ X^2 ha un autovalore -1 con autovettore v_1, e un autovalore 1 con autovettore v_2

$\Rightarrow v_1$ dev'essere un multiplo di $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e v_2 un multiplo di $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} +i & \\ & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -i & \\ & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} i & \\ & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -i & \\ & -1 \end{bmatrix}$$

n autoval. distinti $\Rightarrow 2^n$ soluzioni.

Data una qualunque $f: U \to \mathbb{C}$, $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, esiste p polinomio tale che $f(A) = p(A)$.

⚠ p però dipende dalla matrice A, quindi c'è da stare attenti.

Però, usando polinomi di interpolazione possiamo dimostrare molte proprietà.

- $f(MAM^{-1}) = M f(A) M^{-1}$ per ogni A, f, M invertibile.

  $f(A) = p(A)$, e lo stesso polinomio soddisfa $p(MAM^{-1}) = f(MAM^{-1})$

  perché A e MAM^{-1} sono simili.

- $f\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f(A) & 0 \\ 0 & f(B) \end{bmatrix}$ prendendo p che interpola f su $\Lambda\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\right)$

- Se $\Lambda(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n\}$, allora $\Lambda(f(A)) = \{f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots f(\lambda_n)\}$.

  Le molteplicità algebriche restano le stesse, geometriche possono aumentare se $f'(\lambda_i) \neq 0$

  $$f\left(\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{1}{2}f''(\lambda) \\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) \\ 0 & 0 & f(\lambda) \end{bmatrix}$$

- Se $h(x) = f(x)g(x)$ per certe funzioni scalari f, g, h, allora $h(A) = f(A)g(A) = g(A)f(A)$

Dim: $f(A)=p_f(A)$, $g(A)=p_g(A)$ per certi polinomi p_f, p_g. Ora, $p_h = p_f \cdot p_g$ è un polinomio di interpolazione per h.

$$h(A)=p_h(A)=p_f(A)p_g(A)=f(A)g(A)$$
$$=p_g(A)p_f(A)=g(A)f(A).$$

Nello stesso modo, si dimostra che se $h(x)=f(x)+g(x)$ allora $h(A)=f(A)+g(A)$
e che se $h(x)=f(g(x))$ allora $h(A)=f(g(A))$.

In questo modo si dimostra che le funzioni di matrici soddisfano identità prese da quelle scalari.
ES: la funzione $f(x)=\sqrt{x}$ soddisfa $[f(x)]^2-x=0$
$\Rightarrow$ per ogni matrice A, $[f(A)]^2-A=0$.

ES: $\sin(A)^2+\cos(A)^2=I$.

<u>Continuità</u> di funzioni di matrici.

Se ho f_n sequenze di funzioni $f_n: U\to\mathbb{C}$ e A tale che $f_n(A)$ siano definite (quindi f_n derivabile k_i-1 volte in λ_i per ogni blocco di Jordan di A), e per $f: U\to\mathbb{C}$ ho

e se $f_n^{(j)}(\lambda_i)\to f(\lambda_i)$ per ogni $j<k_i$,
allora $f_n(A)\to f(A)$. $A=VJV^{-1}$
(Basta scriverlo sui blocchi di Jordan)

L'altro concetto di continuità, se $A_n\to A$ allora $f(A_n)\to f(A)$ è più complicato.

Vediamo prima il caso in cui f è olomorfa

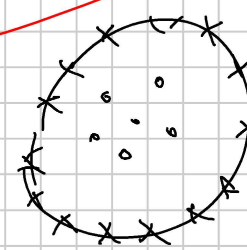
Formula di Cauchy $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)(z-\lambda)^{-1}dz$

e $\frac{1}{k!} f^{(k)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)(z-\lambda)^{-k-1}dz$

Teo: Se f è olomorfa e Γ contiene al suo interno $\Lambda(A)$, allora

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\,(zI-A)^{-1}dz.$$

[Commento: si potrebbe usare anche computazionalmente $\approx \frac{1}{2\pi i} \sum f(z_i)(z_iI-A)^{-1} w_i$



ma di solito c'è di meglio]

Dim: posso ricondurmi al caso di un blocco di Jordan

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\,(zI-J)^{-1}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\begin{bmatrix} z-\lambda & -1 & & 0 \\ & z-\lambda & -1 & \\ & & \ddots & -1 \\ 0 & & & z-\lambda \end{bmatrix}^{-1} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\begin{bmatrix} (z-\lambda)^{-1} & (z-\lambda)^{-2} & \cdots & (z-\lambda)^{-k} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & (z-\lambda)^{-2} \\ 0 & & & (z-\lambda)^{-1} \end{bmatrix} dz = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-\lambda}dz & \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-\lambda)^2}dz & \cdots \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \cdots & \frac{f^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & f(\lambda) \end{bmatrix} = f(J)$$

$\square$

<u>Corollario</u>: Se f olomorfa, $A_n \to A$ implica $f(A_n) \to f(A)$

<u>dim</u>: $$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z) (zI - A_n)^{-1} dz \to \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z) (zI - A)^{-1} dz$$

Se Γ contiene gli autoval. di tutti gli A_n, perché sul contorno Γ l'integrando è continuo.

In realtà, lo stesso risultato vale anche se f è continua e differenziabile quante volte serve per definire $f(A)$ in un intorno di $\Lambda(A)$.

Caso complicato: A_n hanno autoval. distinti, ma A limite no. Bisogna dimostrare che i polinomi di interpolazione di Hermite p_n di A_n convergono a quello di A.

<u>Condizionamento</u> di una funzione $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$: determinare

$$\frac{\|f(\tilde{x}) - f(x)\|}{\|\tilde{x} - x\|}$$

$$K_{abs}(f,x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\|\tilde{x} - x\| \le \varepsilon} \frac{\|f(\tilde{x}) - f(x)\|}{\|\tilde{x} - x\|}$$

Se f differenziabile, $f(\tilde{x}) = f(x) + J_{f,x} \cdot (\tilde{x} - x) + o(\|\tilde{x} - x\|)$

e $\quad K_{abs}(f,x) = \| J_{f,x} \|$.

$$K_{rel} = \limsup \frac{\frac{\|f(\tilde{x}) - f(x)\|}{\|f(x)\|}}{\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|}} = \frac{\|x\|}{\|f(x)\|} \cdot \| J_{f,\cancel{x}} \|.$$

Per una funzione di matrice, possiamo pensarla come un problema da $\mathbb{R}^{n^2}$ (o $\mathbb{C}^{n^2}$) a $\mathbb{R}^{n^2}$ (o $\mathbb{C}^{n^2}$), vettorizzando, e quindi andare a calcolare la Jacobiana $J_{f,x}$ di dimensione $n^2 \times n^2$ e studiarne norma, autovalori, ecc.