Condizionamento di funzioni di matrici

$$K_{rel}(f,x) = \frac{\|Jf\| \cdot \|x\|}{\|f(x)\|}$$

Derivata di Fréchet di una funzione di matrice f in $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ è l'operatore lineare $L_{f,A} : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ (quando esiste) tale che

$$f(A+E) = f(A) + L_{f,A}(E) + o(\|E\|) \qquad \forall\, E \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

Es: $f(x) = x^2$

$$f(A+E) = (A+E)^2 = \underbrace{A^2}_{f(A)} + \underbrace{EA+AE}_{L_{f,A}(E)} + \underbrace{E^2}_{o(\|E\|)}$$

$L_{f,A}$ è l'operatore $E \mapsto EA+AE$

Possiamo vederlo come un operatore $\mathbb{C}^{n^2} \to \mathbb{C}^{n^2}$ tramite vettorizzazione:

$$\text{vec}(E) \mapsto \text{vec}(EA+AE) = \underbrace{\left(A^T \otimes I + I \otimes A\right)}_{L_{f,A} \in \mathbb{C}^{n^2 \times n^2}} \text{vec}\, E$$

È lo Jacobiano classico della funzione $\text{vec}\, A \mapsto \text{vec}\, f(A)$.

Altro esempio:

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad f(A) = A^{-1}$ $\qquad f(x)x - 1 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{C}$

$$\Downarrow$$

$f(A)A - I = 0$

$$f(A+E) = (A+E)^{-1} = \left(A(I+A^{-1}E)\right)^{-1} = (I+A^{-1}E)^{-1}A^{-1}$$

$$= \left(I - A^{-1}E + A^{-1}EA^{-1}E + \dots\right)A^{-1}$$

$$= \underbrace{A^{-1}}_{f(A)} - \underbrace{A^{-1}EA^{-1}}_{L_{f,A}(E)} + \underbrace{A^{-1}EA^{-1}EA^{-1} - A^{-1}EA^{-1}EA^{-1}EA^{-1} + \dots}_{o(\|E\|)}$$

$$\|A^{-1}EA^{-1}EA^{-1}\| \leq \|A^{-1}\|\cdot\|E\|\cdot\|A^{-1}\|\cdot\|E\|\cdot\|A^{-1}\|$$
$$= O(\|E\|^2)$$

$$L_{f,A}(E) = -A^{-1}EA^{-1}$$

cioè $\quad \mathrm{vec}\, L_{f,A}(E) = \mathrm{vec}\left(-A^{-1}EA^{-1}\right) = \underbrace{\left(-A^{-T} \otimes A^{-1}\right)}_{\hat{L}_{f,A} \in \mathbb{C}^{n^2 \times n^2}} \mathrm{vec}(E)$

<u>Proprietà</u>

$$L_{\alpha f + \beta g, A} = \alpha L_{f,A} + \beta L_{g,A}$$ (α, β costanti, f, g funzioni)

$$L_{f\circ g, A} = L_{f, g(A)} \circ L_{g,A} \qquad \hat{L}_{f\circ g, A} = \hat{L}_{f,g(A)} \cdot \hat{L}_{g,A}$$

(prodotto di matrici $n^2 \times n^2$)

$$L_{f^{-1}, f(A)} = \left(L_{f,A}\right)^{-1} \qquad \hat{L}_{f^{-1}, f(A)} = \left(\hat{L}_{f,A}\right)^{-1}$$

(inversa di matrici $n^2 \times n^2$)

<u>ES</u>: derivata della radice quadrata di matrice

$f(x) = x^2$

$g(x) = \sqrt{x}$ funzione inversa

Scegliamo il ramo principale, cioè, supponiamo che x <u>non</u> sia un reale negativo o nullo, e prendiamo $g(x) \in$ semipiano destro.

$$L_{f,A}(E) = AE + EA \qquad B = f(A) \qquad A = g(B)$$

La derivata di Fréchet $L_{g,B}(E) = X$ soddisfa

$$X = L_{f,A}^{-1}(E) \iff L_{f,A}(X) = E$$

$$AX + XA = E$$

Per calcolare $L_{g,B}(E)$ devo risolvere l'eq. di Sylvester

$$(*) \qquad g(B)X + Xg(B) = E$$

Notiamo che esiste sempre soluzione: $\Lambda(g(B)) \subseteq RHP$ (right half-plane)

$(*)$ ha soluzione unica $\Leftarrow$ $g(B)$, $-g(B)$ non hanno autoval. comuni

$$\left.\begin{array}{l} \Lambda(g(B)) \subset RHP \\ \Lambda(-g(B)) \subset LHP \end{array}\right\} \text{disgiunti.}$$

In realtà, la stessa proprietà vale per qualunque ramo di $\sqrt{x}$: se per assurdo $\lambda, -\lambda \in \Lambda(g(B))$, allora la scelta dei rami non è coerente: su λ^2, o prendo $g(\lambda^2) = \lambda$, o $g(\lambda^2) = -\lambda$.

Quindi riusciamo sempre a calcolare $L_{g,B}$ per $g(x) = \sqrt{x}$, per ogni B tale che $\Lambda(B)$ non contiene autovalori reali negativi o nulli.

(quindi per esempio $g\left(\left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & 0 \end{array}\right]\right)$ esiste, ma non è Fréchet differenziabile).

Esiste una generalizzazione a blocchi della formula

$$f\left(\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda)\\ 0 & f(\lambda)\end{bmatrix} :$$

Teorema sia $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ con autovalori λ_i e blocchi di Jordan associati di dim. k_i,

f differenziabile $2k_i-1$ volte in un intorno di λ_i $\forall i$.

Allora, f è Fréchet-differenziabile in A, e vale

$$f\left(\begin{bmatrix}A & E\\ 0 & A\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} f(A) & L_{f,A}(E)\\ 0 & f(A)\end{bmatrix}.$$

$2n\times 2n$

(Questo consente di calcolare $L_{f,A}(E)$, cioè il prodotto $\hat{L}_{f,A}\cdot \mathrm{vec}(E)$ senza formare matrici $n^2\times n^2$).

Dim: innanzitutto, il LHS è ben definito, perché $\begin{bmatrix}A & E\\ 0 & A\end{bmatrix}$ ha blocchi di Jordan di dim. al massimo il doppio di quelli di A. Inoltre, f è definita (e continua) anche in un intorno di $\begin{bmatrix}A & E\\ 0 & A\end{bmatrix}$, perché tutte le matrici in un intorno di questa hanno blocchi di Jordan di dimensione uguale o minore.

Fissiamo $\varepsilon>0$, e calcoliamo

$$f\left(\begin{bmatrix}A+\varepsilon E & E\\ 0 & A\end{bmatrix}\right)$$

trasformandola in una matrice diagonale a blocchi:

$$\begin{bmatrix}I & -X\\ 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A+\varepsilon E & E\\ 0 & A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I & X\\ 0 & I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A+\varepsilon E & 0\\ 0 & A\end{bmatrix}$$

se X risolve l'eq. di Sylvester $(A+\varepsilon E)X-XA=-E$.

Notiamo che $X = -\frac{1}{\varepsilon} I$ è una soluzione:

$$(A+\varepsilon E)\cdot\left(-\frac{1}{\varepsilon}I\right) - \left(-\frac{1}{\varepsilon}I\right)A = -\cancel{\frac{1}{\varepsilon}A} - E + \cancel{\frac{1}{\varepsilon}A} = -E.$$

(Questa soluzione potrebbe non essere unica, ma a noi basta che ne esista una).

$$f\left(\begin{bmatrix} A+\varepsilon E & E \\ 0 & A \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A+\varepsilon E & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -X \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f(A+\varepsilon E) & 0 \\ 0 & f(A) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -X \\ 0 & I \end{bmatrix} \qquad X = -\frac{1}{\varepsilon}I$$

$$= \begin{bmatrix} f(A+\varepsilon E) & -\frac{1}{\varepsilon}f(A) \\ 0 & f(A) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\varepsilon}I \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} f(A+\varepsilon E) & \frac{1}{\varepsilon}\left(f(A+\varepsilon E)-f(A)\right) \\ 0 & f(A) \end{bmatrix}$$

Poiché f è continua in un intorno di $\begin{bmatrix} A & E \\ 0 & A \end{bmatrix}$, posso far tendere $\varepsilon \to 0$ ottenendo

$$f\left(\begin{bmatrix} A & E \\ 0 & A \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f(A) & L_{f,A}(E) \\ 0 & f(A) \end{bmatrix}.$$

Questo calcolo dimostra anche che f è Fréchet differenziabile: abbiamo mostrato che

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left(f(A+\varepsilon E)-f(A)\right) = \text{blocco }(1,2) \text{ di } f\left(\begin{bmatrix} A & E \\ 0 & A \end{bmatrix}\right)$$

cioè la derivata direzionale esiste (ed è continua in E).

Teo. del differenziale totale $\Rightarrow$ f ammette Jacobiano/è differenziabile. $\square$

In questo modo possiamo valutare $\hat{L}_{f,A}\cdot \mathrm{vec}\, E$ per dei vettori vec E dati, e farci un'idea di quanto grandi sono queste derivate di Fréchet.

Il passo successivo è trovare un modo di valutare $\|L_{f,A}\|$. C'è una scelta della norma più naturale:

$$\|E\|_F = \|\mathrm{vec}\, E\|_2$$

$$\|L_{f,A}\|_{F\to F} = \max_{E\neq 0} \frac{\|L_{f,A}(E)\|_F}{\|E\|_F}$$ che corrisponde a

$$\|\hat{L}_{f,A}\|_2 = \max_{v=\mathrm{vec}E\neq 0} \frac{\|\hat{L}_{f,A}v\|_2}{\|v\|_2} = \sigma_{\max}(\hat{L}_{f,A})$$

Per calcolare $\|\hat{L}_{f,A}\|$ posso usare il metodo delle potenze, però, serve un modo per calcolare non solo $v \mapsto \hat{L}_{f,A} v$, che sappiamo fare, ma anche $v \mapsto \hat{L}_{f,A}^{*} v$.

In alcuni casi si riesce a scrivere $\hat{L}_{f,A}^{*} v$ come un'altra derivata di Frechet, ad es. $L_{f,A^*}(E)$.

Anche se calcolare $\sigma_{\max}(\hat{L}_{f,A})$ non è semplice, c'è un modo di calcolare $\Lambda(\hat{L}_{f,A})$ facilmente:

Teo: Se $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ha autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ (con molteplicità algebrica), allora gli n^2 autovalori di $\hat{L}_{f,A}$ sono dati da

$$f[\lambda_i, \lambda_j] = \begin{cases} \dfrac{f(\lambda_i)-f(\lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j} & i\neq j \\ f'(\lambda_i) & i=j \end{cases} \qquad i,j = 1,2,\dots n$$

(al variare di i e j da 1 a n).

Teo: Innanzitutto, rimpiazziamo la f con un polinomio p tale che $f(\lambda_i)=p(\lambda_i)$, $f'(\lambda_i)=p'(\lambda_i)$, ... con abbastanza derivate da assicurarci che

$$f\left(\begin{bmatrix}A & E\\ 0 & A\end{bmatrix}\right)=p\left(\begin{bmatrix}A & E\\ 0 & A\end{bmatrix}\right).$$

Siano $c_0, c_1, \dots c_d$ i coefficienti di p

$$p(A+E)=c_0I+c_1(A+E)+c_2(A+E)^2+\dots+c_d(A+E)^d$$

$$=\underline{c_0I}+c_1(\underline{A}+E)+c_2(\underline{A^2}+EA+AE+E^2)+\dots$$

$$\dots+c_d(\underline{A^d}+A^{d-1}E+\dots)$$

$(A+E)(A+E)(A+E)$

$$=\underline{p(A)}+\underbrace{\boxed{c_1E+c_2(EA+AE)+c_3(EA^2+AEA+A^2E)+\dots+c_d(EA^{d-1}+AEA^{d-2}+\dots+A^{d-2}EA+A^{d-1}E)}}_{=L_{f,A}(E)}+o(\|E\|)$$

$\hat{L}_{f,A}$ è la matrice $n^2\times n^2$ tale che $\mathrm{vec}\,L_{f,A}(E)=\hat{L}_{f,A}\cdot\mathrm{vec}\,E$

$$\hat{L}_{f,A}=c_1\cdot I+c_2(A^T\otimes I+I\otimes A)+c_3(A^{2T}\otimes I+A^T\otimes A+I\otimes A^2)+\dots$$

$$\dots+c_d(A^{(d-1)T}\otimes I+A^{(d-2)T}\otimes A+\dots+I\otimes A^{d-1})$$

Prendiamo forma di Schur $A^T=U_1T_1U_1^*$, $A=U_2T_2U_2^*$, allora $A^k=U_2T_2^kU_2^*$, $(A^T)^k=U_1T_1^kU_1^*$ $\forall k$

$$\hat{L}_{f,A}=(U_1\otimes U_2)\Big(c_1I+c_2(T_1\otimes I+I\otimes T_2)+c_3(T_1^2\otimes I+T_1\otimes T_2+I\otimes T_2^2)$$

$$P \quad \dots+c_d(T_1^{d-1}\otimes I+T_1^{d-2}\otimes T_2+\dots+I\otimes T_2^{d-1})\Big)(U_1\otimes U_2)^*$$

unitaria ↑ triang. superiore ↑ unitaria

È una forma di Schur! Per trovare $\Lambda(\hat{L}_{f,A})$, basta vedere cosa c'è sulla diagonale.

In ogni termine della forma $A\otimes B$, l'elemento di posto

$i+n(j-1),\ i+n(j-1)$ è $A_{ii}\cdot B_{jj}$

$\mathrm{diag}(T_1)=\mathrm{diag}(T_2)=(\lambda_1,\lambda_2,\dots\lambda_n)$

$$c_1 I \qquad c_2\left(T_1\otimes 1+1\otimes T_2\right) \qquad c_3\left(T_1^2\otimes 1+T_1\otimes T_2+1\otimes T_2^2\right)$$

$$1 \qquad \lambda_i\cdot 1 \quad 1\cdot\lambda_j \qquad \lambda_i^2\cdot 1 \quad \lambda_i\cdot\lambda_j \quad 1\cdot\lambda_j^2$$

$$c_d\left(T_1^{d-1}\otimes 1+T_1^{d-2}\otimes T_2+\dots+1\otimes T_2^{d-1}\right)$$

$$\lambda_i^{d-1}+\lambda_i^{d-2}\lambda_j+\dots+\lambda_i\lambda_j^{d-2}+\lambda_j^{d-1}$$

$$=\frac{\lambda_i^d-\lambda_j^d}{\lambda_i-\lambda_j}$$ se $\lambda_i\neq\lambda_j$, o $d\lambda_i^{d-1}$ se $\lambda_i=\lambda_j$

Rimettendo tutto insieme, sulla diagonale di

$(U_1\otimes U_2)^*\hat{L}_{f,A}(U_1\otimes U_2)$ nel posto $i+n(j-1)$ ho

$$\overset{\frac{\lambda_i-\lambda_j}{\lambda_i-\lambda_j}}{c_1\cdot 1}+c_2\cdot\overset{\frac{\lambda_i^2-\lambda_j^2}{\lambda_i-\lambda_j}}{(\lambda_i+\lambda_j)}+c_3\cdot\frac{\lambda_i^3-\lambda_j^3}{\lambda_i-\lambda_j}+\dots+c_d\frac{\lambda_i^d-\lambda_j^d}{\lambda_i-\lambda_j}$$

$$=\frac{p(\lambda_i)-p(\lambda_j)}{\lambda_i-\lambda_j}=\frac{f(\lambda_i)-f(\lambda_j)}{\lambda_i-\lambda_j}$$

Questo se $\lambda_i\neq\lambda_j$, se $\lambda_i=\lambda_j$ ho $\sum_{k=0}^{d}c_k k\lambda_i^{k-1}=p'(\lambda_i)$

$=f'(\lambda_i)$

Possiamo ottenere un bound sulla norma se $\hat{L}_{f,A}$ è diagonalizzabile:

$$\|\hat{L}_{f,A}\| = \|V \cdot \Lambda \cdot V^{-1}\| \leq \|V\| \cdot \|\Lambda\| \cdot \|V^{-1}\| = k(V) \cdot \max_{i,j} \left| f[\lambda_i, \lambda_j] \right|$$

che è un buon bound se $k(V)$ è piccolo (cioè se A è normale o quasi), cattivo altrimenti.

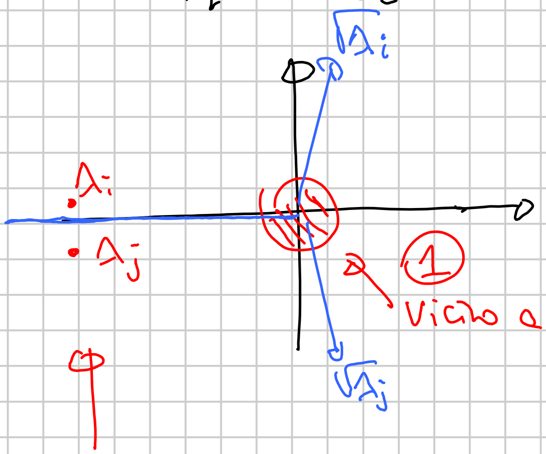
Però ci dà un'idea di per quali autovalori di A possiamo aspettarci mal condizionamento.

ES: $f(x) = \sqrt{x}$ (radice quadrata principale)

Per quali scelte di λ_i, λ_j la quantità

$f[\lambda_i, \lambda_j]$ è grande?

$$\begin{cases} \dfrac{f(\lambda_i) - f(\lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j} \\ f'(\lambda_i) \end{cases}$$



① Vicino a 0, $f'(\lambda_i)$ è grande

② λ_i, λ_j da lati opposti del "taglio" (discontinuità) hanno rapporto incrementale grande.

$$\|\hat{L}_{f,A}\| \geq \rho(\hat{L}_{f,A})$$

$\sqrt{A}$ mal condizionata se:

1) A molto non normale, oppure
2) autovalori piccoli

3) autovol. da lati opposti del foglio.