

Esponenziale di matrici

Note Title

2024-04-12

$$\exp(A) = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots$$

o della costruzione generale di $f(A)$

⚠ $\exp(A+B) \neq \exp(A)\exp(B)$, per matrici

Invece questa identità è vera:

$$\exp(A+tI) = \exp(A) \cdot \exp(tI) = \exp(A) \cdot e^t$$

e qualche volta è utile computazionalmente, ad es. se $t \gg \|A\|$ per ridurre l'esponentiale della matrice (con norma grande) $A+tI$ a quello di A con norma più piccola

O anche per preservare proprietà di positività:

Teo: se A è una matrice che ha elementi fuori della diagonale non negativi, allora $\exp(A) \geq 0$ (elemento per elemento)

Dim: posso scrivere $A = B + tI$, con B che ha tutti gli elementi ≥ 0 e $t \leq 0$, allora

$$\exp(A) = \exp(B+tI) = \exp(B) e^t = \begin{pmatrix} I+B+\frac{B^2}{2}+\frac{B^3}{3!}+\dots \end{pmatrix} e^t \geq 0$$

$\begin{matrix} \forall & \forall & \forall & \forall & \dots & \forall \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \end{matrix}$

□

Teo: le soluzioni del problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} x(0) = v \\ \dot{x}(t) = Ax(t) \end{cases}$$

$$\text{è } x(t) = \exp(tA)v$$

Dim: deriviamo termine a termine

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{d}{dt} \left(I + tA + \frac{t^2 A^2}{2} + \dots \right) v = \left(0 + A + tA^2 + \frac{t^2}{2!} A^3 + \dots \right) v \\ &= A \left(I + tA + \frac{t^2}{2} A^2 + \dots \right) v = A \exp(tA) v.\end{aligned}$$

Per esempio, possiamo calcolare $\exp(A)v$ risolvendo questo sistema di eq. differenziali numericamente e calcolando $x(1)$

Ad es. il metodo di Eulero esplicito con n intervalli produce

$$\exp(A)v = x(1) \approx \left(I + \frac{1}{n} A \right)^n v$$

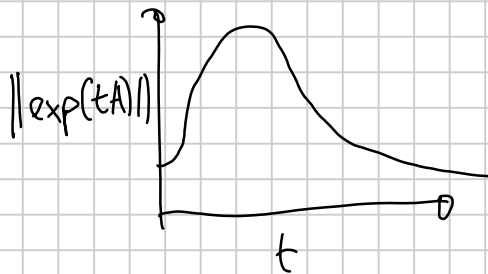
(che non ci stupisce perché $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} x \right)^n = e^x$)

Calcolare $\exp(A)$ in modo stabile non è semplice ("Nineteen dubious methods to compute the matrix exponential")

Abbiamo già visto che metodi come $f(A) = V \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix} V^{-1}$

sono instabili, e anche $I + A + \frac{1}{2}A^2 + \dots + \frac{1}{d!}A^d$, per colpa della crescita dei termini intermedi.

C'è anche un altro tipo di crescita intermedia che complica le cose:



(esattamente come il grafico di $\|A^k\|$ vs. k un po' di bz. fa).

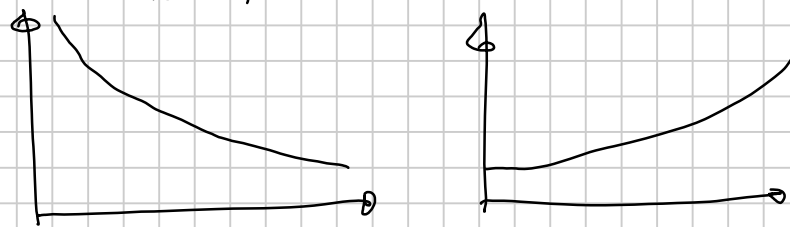
Questo mostra che metodi che calcolano $\exp(A)$ risolvendo l'equazione differenziale $\dot{x} = Ax$ andranno spesso ad

essere instabili: dovuto calcolare tutti i valori intermedi di $\exp(tA)v$, possono da valori grandi + cancellazione.

Eccezione: se A è una matrice normale, $A = Q \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} Q^x$ con Q unitaria,

$$\exp(tA) = \exp\left(Q \begin{bmatrix} t\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t\lambda_n \end{bmatrix} Q^x\right) = Q \begin{bmatrix} e^{t\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{t\lambda_n} \end{bmatrix} Q^x$$

$$\text{e } \|\exp(tA)\| = \max_{\lambda \in \Lambda(A)} |e^{t\lambda}| = \|\exp(A)\|^t$$



$\Rightarrow$ il grafico non contiene "gobbe".

Derivate di Fréchet dell'esponentiale e condizionamento.
Ricordiamo:

$$\exp(A+E) = \exp(A) + \underbrace{L_{\exp, A}[E]}_{\text{derivata di Fréchet}} + o(\|E\|)$$

$$\exp(A+E) = I + (A+E) + \frac{1}{2}(A+E)^2 + \frac{1}{3!}(A+E)^3 + \dots$$

$$= \underbrace{\left(I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots\right)}_{\exp(A)} + \underbrace{E + \frac{1}{2}(EA+AE) + \frac{1}{3!}(A^2E + AEA + EA^2) + \dots}_{L_{\exp, A}[E]} + o(\|E\|)$$

Un po' più comoda, è una rappresentazione integrale:

Teo.

$$L_{\exp, A}[\tilde{E}] = \int_0^1 \exp(At) E \exp(A(1-t)) dt$$

Dim:

$$\text{Integrale RHS} = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k E \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j (1-t)^j dt$$

$$= \sum_{k,j=0}^{\infty} A^k E A^j \underbrace{\int_0^1 t^k (1-t)^j dt}_{\frac{1}{(k+j+1)!}}$$

$$= \sum_{k,j=0}^{\infty} A^k E A^j \cdot \frac{1}{(k+j+1)!} = E + \frac{1}{2!} (AE + EA) + \frac{1}{3!} (A^2 E + AEA + EA^2) + \dots$$

$$= L_{\exp, A}[\tilde{E}], \quad \square$$

Quindi possiamo stimare

$$\|L_{\exp, A}[\tilde{E}]\| = \left\| \int_0^1 \exp(At) E \exp(A(1-t)) dt \right\|$$

$$\leq \int_0^1 \|\exp(At)\| \cdot \|E\| \cdot \|\exp(A(1-t))\| dt$$

$$\leq \int_0^1 e^{\|tA\|} \cdot \|E\| \cdot e^{\|A(1-t)\|} dt$$

$$= \int_0^1 e^{t\|A\|} \cdot \|E\| \cdot e^{\|A\|(1-t)} dt$$

$$= \int_0^1 e^{\|A\|} \|E\| dt = e^{\|A\|} \cdot \|E\|$$

Da questo segue che $K_{\exp, A} \leq \frac{e^{\|A\|}}{\|\exp(A)\|} \|A\|$.

che può essere molto grande, ad es. avvenendo with
l'esempio $A = \begin{bmatrix} 0 & 30 \\ -30 & 0 \end{bmatrix}$ $\exp(A) = \begin{bmatrix} \cos(30) & \sin(30) \\ -\sin(30) & \cos(30) \end{bmatrix}$

In realtà, se A è una matrice normale, questa stima si può migliorare di molto: per una matrice normale, $\|\exp(tA)\| = \|\exp(A)\|^t$.

Possiamo riprendere la stima sopra e migliorarla:

$$\begin{aligned}\|L_{\exp, A}[E]\| &\leq \int_0^1 \|\exp(tA)\| \cdot \|E\| \cdot \|\exp((1-t)A)\| dt \\ &= \int_0^1 \|\exp(A)\|^t \|E\| \cdot \|\exp(A)\|^{1-t} dt \\ &= \|\exp(A)\| \cdot \|E\|\end{aligned}$$

$$K_{\exp, A} \leq \frac{\|\exp(A)\|}{\|A\|} \cdot \|A\| = \|A\|.$$

$\Rightarrow$ per una matrice normale, $\exp(A)$ ha un condizionamento molto minore del caso generale. $\square$

Metodo considerato migliore per il calcolo dell'esponentiale:
"Scaling and Squaring" + approssimazioni di Padé

Approssimazioni di Padé:

varianti delle serie di Taylor in cui si trova una funzione razionale di grado (p, q)

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} + O(x^{p+q+1})$$

Sono molto accurate per $\|x\|$ piccolo.

$$N_{pq}(x) = \sum_{j=0}^p \frac{(p+q-j)! p!}{(p+q)! (p-j)! j!} x^j \quad D_{pq}(x) = N_{pq}(-x).$$

Ad es., $p=q=2$ $\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{x^2 + 6x + 12}{x^2 - 6x - 12}$

Quindi per matrici A con norma $\|A\|$ piccola, vogliamo usare

$$\exp(A) \approx D(A)^{-1} N(A).$$

Vediamo ora una tecnica per stimare l'errore commesso da un'approssimazione di questo tipo.

Idea: vogliamo trovare una matrice H tale che

$$D(A)^{-1} N(A) = \exp(A+H) \quad \text{e} \quad \frac{\|H\|}{\|A\|} \text{ piccola.}$$

Se mostriamo che $\frac{\|H\|}{\|A\|}$ è dell'ordine della precisione di macchina, l'errore commesso rimpiazzando $\exp(A)$ con $D(A)^{-1} N(A)$ è dello stesso ordine di grandezza di quello commesso se rimpiazziamo A con $\text{fl}(A)$, la sua approssimazione floating point.

Andiamo a risolvere la versione scalare di questo problema:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = e^{x+h} \quad \rightarrow \quad h = \log\left(\frac{N(x)}{D(x)} \cdot e^{-x}\right)$$

$h=h(x)$ è una funzione analitica in un intorno di $x=0$

In particolare, il suo sviluppo di Taylor in $x=0$ ha molti zeri iniziali:

$$\frac{N(x)}{D(x)} \cdot e^{-x} = 1 + O(x^{p+q+1})$$

$$h(x) = \log\left(\frac{N(x)}{D(x)} e^{-x}\right) = O(x^{p+q+1})$$

$h(x)$ è una funzione scalare, posso costruire $h(A)$, e vale

$$h(A) = \log\left(D(A)^{-1} N(A) \exp(-A)\right).$$

$$\begin{array}{c} \updownarrow \\ \overline{\downarrow} \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \end{array} \quad A \text{ e } h(A) \text{ commutano}$$

$$D(A)^{-1} N(A) = \exp(A) \exp(h(A)) = \exp(A + h(A))$$

Quindi $H = h(A)$ è la matrice che cerchiamo,

$$D^{-1}(A) N(A) = \exp(A + H)$$

Quanto piccola è $\|H\| = \|h(A)\|$?

Sviluppo di Taylor:

$$h(x) = C_{p+q+1} x^{p+q+1} + C_{p+q+2} x^{p+q+2} + \dots$$

$$h(A) = C_{p+q+1} A^{p+q+1} + C_{p+q+2} A^{p+q+2} + \dots$$

$$\|h(A)\| \leq |C_{p+q+1}| \|A\|^{p+q+1} + |C_{p+q+2}| \cdot \|A\|^{p+q+2} + \dots$$

Teo: per $p=q=13$ e $\|A\| \leq 5.4$, allora $\frac{\|H\|}{\|A\|} \leq u$

dove $u \approx 2.2 \cdot 10^{-16}$ è la precisione di macchina (double).

Vediamo un esempio di questa tecnica:

Vogliamo trovare $r > 0$ tale che $\|A\| \leq r \Rightarrow \frac{\|h(A)\|}{\|A\|} \leq u$

cioè $r > 0$

$$|C_{p+q+1}| r^{p+q+1} + |C_{p+q+2}| r^{p+q+2} + \dots = u \cdot r$$

Se diamo a r la sua sol. positive, abbiamo che

$$\|A\| \leq r \Rightarrow$$

$$\frac{\|h(A)\|}{\|A\|} \leq |C_{p+q+1}| r^{p+q} + |C_{p+q+2}| r^{p+q+1} + \dots = u.$$