Prossime lezioni:

gio 16/5 16:00
ven 17/5 16:00
lun 20/5 "
ven 24/5 "
lun 27/5 "
mer 29/5 11:00

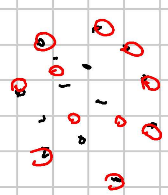
$U_j = [u_1 \dots u_j]$

$\{u_1, u_2, \dots u_j\}$ base o.n. di $K_j(A,b) = \text{span}\{b, Ab, \dots, A^{j-1}b\}$

$A_j = U_j^T A U_j =$ Hessenberg $j \times j$

$b = U_j \cdot e_1 \beta \qquad \beta = \|b\|$

<u>Oss</u>: gli autovalori di A_j (valori di Ritz di A) sono buone approssimazioni degli autovalori <u>esterni</u> di A.



<u>Lemma</u>: se $\tilde{p}$ polinomio di grado $< j$, allora

$$\tilde{p}(A)\, b = U_j\, \tilde{p}(A_j)\, e_1 \beta .$$

Dato A $n \times n$, esiste un polinomio di grado $< n$ tale che $f(A) = p(A)$, polinomio di interpolazione sullo spettro di A.

Però, calcolare $p(A)b$ non è semplice per A sparsa perché il grado è alto, e perché serve conoscere $\Lambda(A)$

<u>Idea</u>: in alternativa, posso calcolare

$$f(A)\,b \approx U_j f(A_j) e_1 \beta = c$$

$$f(\Box) \qquad\qquad f(\Box)$$

Notiamo che $f(A_j) = \tilde{p}(A_j)$, dove $\tilde{p}$ è il polinomio di approssimazione a f su $\Lambda(A_j)$, di grado $< j$

Quindi per il lemma $c = \tilde{p}(A)b$

$$f(A)b = p(A)b \qquad p \text{ pol. int. su } \Lambda(A)$$

$$c = \tilde{p}(A)b \qquad \tilde{p} \text{ pol. int. su } \Lambda(A_j)$$

Però $\Lambda(A_j)$ è un'approssimazione degli autovalori "esterni" di $\Lambda(A)$

Per esempio, se A diagonalizzabile $A = V \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} V^{-1}$

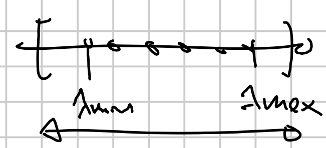
$$f(A)b = V \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n) \end{bmatrix} V^{-1} b \qquad c = V \begin{bmatrix} \tilde{p}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{p}(\lambda_n) \end{bmatrix} V^{-1} b$$

Sugli autovalori più esterni, $\lambda \in \Lambda(A)$ $\mu \in \Lambda(A_j)$

$$f(\lambda) = p(\lambda) \approx f(\mu) = \tilde{p}(\mu)$$

Per molte f, i valori più grandi sono raggiunti nella parte <u>esterna</u> dello spettro.

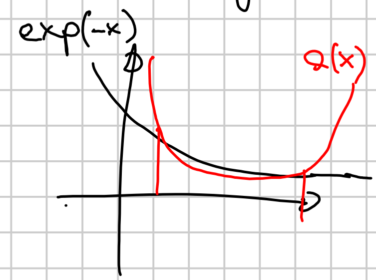
<u>Teorema</u>: A Hermitiana,



$\Lambda(A) \subseteq \mathcal{J}$ intervallo reale $\qquad\qquad \mathcal{J}$

Sia $a(x)$ il polinomio di grado $< j$ che meglio approssima f su $\mathcal{J}$, cioè

$\max_{x\in\mathcal{J}} |f(x)-a(x)|$ è il minimo possibile tra tutti gli $a(x)$



$$a(x) = \arg\min_{\substack{a(x) \\ \text{di grado } <j}} \max_{x\in \mathcal{J}} |f(x)-a(x)|$$

e sia l'errore raggiunto $\delta = \max_{x\in\mathcal{J}}|f(x)-a(x)|$

Allora si ha

$$\|f(A)b - c\| \le 2\delta \|b\|$$

Dim: se $\Lambda(A)\subset \mathcal{J}$, allora $\Lambda(A_j)\subset\mathcal{J}$. Difatti,

$$\lambda_{min} = \min_z \frac{z^*Az}{z^*z} \qquad \lambda_{max}=\max_z \frac{z^*Az}{z^*z}$$

Se μ è un autovalore di A_j con autovettore v, allora

$$\mu = \frac{v^*A_jv}{v^*v} = \frac{v^*U_j^*AU_jv}{v^*U_j^*U_jv} = \frac{w^*Aw}{w^*w}\in[\lambda_{min},\lambda_{max}]$$

$$\|f(A)b-c\| = \|f(A)b - U_j f(A_j)e_1\beta\|$$

$$= \|f(A)b - \underbrace{a(A)b + U_j a(A_j)e_1\beta}_{=0 \text{ perché } \deg(a)<j} - U_j f(A_j)e_1\beta\|$$

$$\le \|(f-a)(A)b\| + \|(f-a)(A_j)e_1\beta\| \le 2\delta\|b\|$$

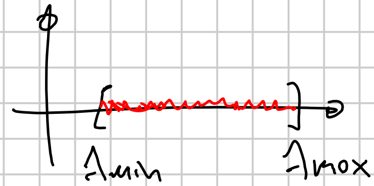
perché ognuno dei due termini si maggiora con

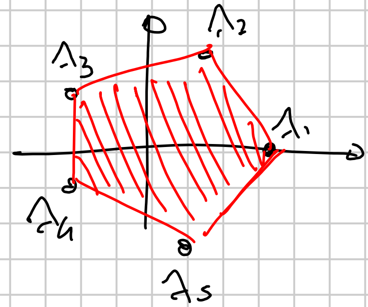
$$\|(f-p)(A)b\| = \Big\| \underbrace{V}_{\text{norma } 1} \underbrace{\begin{bmatrix} f(\lambda_1)-p(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n)-p(\lambda_n) \end{bmatrix}}_{\text{norma } \leq \delta} \underbrace{V^{-1}}_{\text{norma }=1} \underbrace{b}_{\text{norma } \leq \|b\|} \Big\|$$

$$\leq \delta \cdot b$$

<u>Def</u>: il "field of values" (o "numerical range") di $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ è

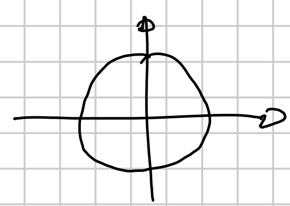
$$W(A) = \left\{ \frac{z^* A z}{z^* z} \; : \; z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \right\}$$

A Hermitiana $\longrightarrow$ $W(A) =$ 

A normale $\longrightarrow$ $W(A) = \text{hull}(\Lambda(A))$ 

<u>es</u>: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{bmatrix}$

A non normale $\rightarrow$ un insieme che può essere più grande.

<u>es</u>: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad W(A) =$ 

cerchio di raggio $\frac{1}{2}$

$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad \left\{ z_1, z_2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \right\}$

<u>Teo</u>: (Crouzeix-Palencia) Sia $\gamma = 1+\sqrt{2}$.

Allora, per ogni matrice A e f olomorfa su $W(A)$ si ha

$$\|f(A)\| \leq \gamma \max_{x \in W(A)} |f(x)|.$$

Congettura di Crouzeix: è vera anche con $\gamma = 2$.

Con questo risultato, dimostriamo:

Teo: $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ (non per forza Hermitiana), f olomorfa, $a(x)$ migliore approssimazione di f su $W(A)$ con un polinomio di grado $< j$

$$\delta = \max_{z \in W(A)} |f(z) - a(z)|.$$

Allora,

$$\|f(A)b - c\| \leq 2 \gamma \delta \|b\|$$

costante del teorema di Crouzeix/Palencia.

Dim: la stessa di sopra!

- i quozienti di Rayleigh di A_j sono quozienti di Rayleigh di A e quindi $W(A_j) \subset W(A)$

$$\|f(A)b - c\| \leq \underbrace{\|(f-a)(A)b\|}_{\leq \gamma \delta \|b\|} + \underbrace{\|U_j (f-a)(A_j) e_1 \beta\|}_{\leq \gamma \delta \|b\|}$$

$$\delta = \max_{x \in W(A)} (f-a)(x).$$

Problema: cosa faccio se $f(A)$ ha massimo non negli autovalori "esterni" ma all'interno, o anche una f per cui $\delta = \min_{a(x) \text{ di grado } j} \max_{\lambda \in \Lambda(A)} |f(\lambda) - a(\lambda)|$ decresce lentamente al crescere di j.

Idea: "rational Arnoldi"

$$K_j(A,b) = \{ p(A)b \ : \ \deg p < j \}$$

$$K_{q,j}(A,b) = \{ p(A)\boxed{q(A)^{-1}b} : \deg p < j \}$$

spazio delle funzioni rationali $r(x) = p(x)/q(x)$, valutate in A e moltiplicate per b, con q polinomio fissato al denominatore

Possiamo usare una variante di Arnoldi per calcolare una base di questo spazio. Supponiamo q abbia radici distinte,

$$q(x) = (x-\mu_1)(x-\mu_2) \cdots (x-\mu_{j-1})$$

Rational Arnoldi:

$u_1 = b/\beta \qquad \beta = \|b\|$

for $j = 1, 2, 3, \dots$

$\boxed{w = (A-\mu_j I)^{-1} b}$ unica differenza rispetto ad Arnoldi

ortogonalizza w rispetto a $u_1, u_2, \dots u_j$

$u_{j+1} = \dfrac{w}{\|w\|}$

end

- Costa più di Arnoldi
- ci sono modi di recuperare la matrice proiettata $A_j = U_j^* A U_j$
- I risultati che abbiamo visto sopra continuano a valere se rimpiazziamo "polinomio $q(x)$ di miglior approssimazione"

con "funzione razionale $\frac{a(x)}{q(x)}$ di migliore approssimazione".

---

step 1 polo μ_1

$u_1 = \frac{1}{\beta} b$ $\qquad f_1 = \frac{1}{\beta}$

$w = (A - \mu_1 I)^{-1} b = f_1(A) b$ $\qquad f_2(x) = \frac{1}{x - \mu_1}$

$w' \leftarrow w - u_1 u_1^* w$

$u_2 = \frac{w'}{\|w'\|}$ $\qquad u_1, u_2$ = base dello spazio

$$\left\{ r(A)b : r(x) \text{ del tipo } \frac{\alpha x + \beta}{x - \mu_1} \right\}$$

$f_3(x) = \frac{1}{x - \mu_2}$

u_1, u_2, u_3 = base dello spazio $\left\{ r(A)b : r(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{(x - \mu_1)(x - \mu_2)} \right\}$

$$\Downarrow$$

$$\text{span}\left(1, \frac{1}{x - \mu_1}, \frac{1}{x - \mu_2}\right).$$

$$K_j(A, b) = \left\{ r(A)b : r(x) = \frac{p(x)}{(x - \mu_1)(x - \mu_2) \cdots (x - \mu_{j-1})} \quad \deg p < j \right\}$$