Note Title — Equazione di Lyapunov — 2024-05-16

Equazione di Lyapunov

Dati $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $Q = Q^* \succeq 0$, l'equazione

$$(*) \qquad A^* W + W A + Q = 0$$

si chiama equazione di Lyapunov.

Dalla teoria delle eq. di Sylvester: $(*)$ ha soluzione unica

$$\Leftrightarrow \quad \Lambda(A^*) \cap \Lambda(-A) = \emptyset$$

Ad es. se A è "Hurwitz stabile", cioè $\Lambda(A) \subset LHP$:

$$\Lambda(A^*) \subset LHP \qquad \Lambda(-A) \subset RHP \Rightarrow \text{sono disgiunti.}$$

Qualche nuovo risultato:

<u>Lemma</u>: se $(*)$ ha una sol. unica W, allora $W = W^*$

Difatti, trasponendo $(*)$, otteniamo

$$W^* A + A^* W^* + Q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad W^* \text{ risolve } (*)$$

Poiché la soluzione è unica per ipotesi, $W = W^*$.

<u>Lemma</u>: supponiamo $\Lambda(A) \subseteq LHP$. Allora, la soluzione di $(*)$ è

$$W = \int_0^\infty \exp(A^* t)\, Q \exp(At)\, dt$$

<u>Dim</u>: Notiamo innanzitutto che l'integrale esiste: poiché $\Lambda(A) \subset LHP$, allora $\exp(At)$ converge a zero esponenzialmente al crescere di t: se $A = V J V^{-1}$ è una forma di Jordan,

$$\exp(At) = \exp\left(V (Jt) V^{-1}\right) = V \exp(Jt) V^{-1}$$

$\exp(Jt)$ è diagonale a blocchi con blocchi del tipo

$$\exp(J_i t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & e^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{1}{(k-1)!} e^{\lambda_i t} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}$$

e poiché $\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0$ questi vanno tutti a zero, con

$$\|\exp(At)\| \sim e^{\alpha t} \qquad \alpha = \max_i \mathrm{Re}\,\lambda_i$$

e analogamente $\exp(A^* t) = (\exp(At))^*$ va a zero.

L'integrando va a zero esponenzialmente $\Rightarrow$ l'integrale esiste.

Per dimostrare che W così definito soddisfa $(*)$, calcoliamo

$$\frac{d}{dt} \exp(A^* t) Q \exp(At) = A^* \exp(A^* t) Q \exp(At) + \\ + \exp(A^* t) Q \exp(At) A$$

e integriamo da entrambi i lati:

$$\int_0^\infty LHS = \int_0^\infty \frac{d}{dt} \exp(A^* t) Q \exp(At)\, dt = \exp(A^* t) Q \exp(At) \Big|_0^\infty$$

$$= 0 - Q$$

$$\int_0^\infty RHS = A^* \int_0^\infty \exp(A^* t) Q \exp(At)\, dt + \left(\int_0^\infty \exp(A^* t) Q \exp(At)\, dt \right) A$$

$$= A^* W + WA$$

Abbiamo mostrato che W dato dalla formula integrale soddisfa

$$A^* W + WA = -Q. \qquad \square$$

Lemma: se $Q \geq 0$, allora $W \geq 0$, e se $Q > 0$, allora $W > 0$.
(ancora sotto l'ipotesi che $\Lambda(A) \subset LHP$)

Dim: segue dall' integrale

$$W = \int_0^\infty (\exp(At))^* Q \exp(At)\, dt$$

che ha integrando (semi) definito positivo.

Vale anche un viceversa:

Se W risolve $A^*W + WA + Q = 0$, e $Q > 0$, $W > 0$, allora A ha tutti gli autovalori nel LHP

Dim: Prendiamo v, λ tali che $Av = v\lambda$, e abbiamo

$$-v^*Qv = v^*(A^*W + WA)v = \bar{\lambda} v^*Wv + v^*Wv\lambda$$
$$= (\bar{\lambda} + \lambda)\, v^*Wv$$

$$2\operatorname{Re}(\lambda) = \bar{\lambda} + \lambda = \frac{-v^*Qv}{v^*Wv} < 0. \quad \square$$

⚠ Non vale una versione con $Q \geq 0$, $W \geq 0$: per vederlo, basta considerare $A^* \cdot 0 + 0 \cdot A = 0$ che chiaramente non implica nulla su $\Lambda(A)$.

Lyapunov si interessava di sistemi di eq. differenziali del tipo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{C}^n \end{cases} \qquad x : [0, \infty) \to \mathbb{C}^n$$

che ha soluzione $x(t) = \exp(At)\, x_0$.

Il sistema si dice <u>asintoticamente stabile</u> se $\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$ per ogni scelta di x_0.

Sappiamo già che $\Lambda(A) \subset LHP \Rightarrow$ asintot. stabile, e questo è un "se e solo se".

Modo analogo di vedere le cose senza autovalori:

Abbiamo trovato $W > 0$, $Q \geq 0$ tali che $A^* W + WA + Q = 0$, definiamo $V(x) = x^* W x$.

Allora possiamo dimostrare che l'energia decresce lungo le soluzioni di $\dot{x} = Ax$:

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = \frac{d}{dt}\, x(t)^* W x(t) = x(t)^* A^* W x(t) + x(t)^* W A x(t)$$

$$= x(t)^* \left(A^* W + WA\right) x(t) = x(t)^* (-Q)\, x(t) < 0$$

Quindi le soluzioni del sistema stanno dentro l'ellissoide

$$x^* W x \leq x_0^* W x_0 .$$

(Con ragionamenti più raffinati si vede che $\lim_{t \to \infty} V(x(t)) = 0$ e quindi $x(t) \to 0$).

Tutti questi risultati hanno degli analoghi per il sistema dinamico a tempo discreto:

$$\begin{cases} x_{k+1} = A x_k & k = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ x_0 \in \mathbb{C}^n \text{ fissato} \end{cases}$$

Questo sistema ha soluzione $x_k = A^k x_0$.

Si ha che $\lim_{k \to \infty} x_k = 0$ per ogni valore iniziale x_0 se e solo se $\Lambda(A) \subset D$ disco unitario $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

<u>Def</u>: A <u>Schur stable</u> se $\Lambda(A) \subset D$.

L'<u>equazione di Stein</u> è

(**) $W - A^* W A = Q$, $\quad Q = Q^* \geq 0$.

Lemma: se (**) ha soluzione unica, allora $W = W^*$

Dim: trasponiamo tutto.

Lemma: Se $\Lambda(A) \subset \mathbb{D}$, allora la soluzione di (**) si scrive come

$$W = \sum_{k=0}^{\infty} (A^*)^k Q A^k.$$

Dim: $A^k \to 0$ esponenzialmente, quindi la somma converge.

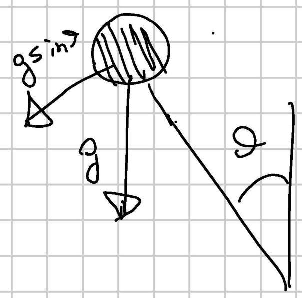
$$W = \sum_{k=0}^{\infty} (A^*)^k Q A^k = Q + \sum_{k=1}^{\infty} (A^*)^k Q A^k = Q + A^*\left(\sum_{h=0}^{\infty} (A^*)^h Q A^h\right) A.$$

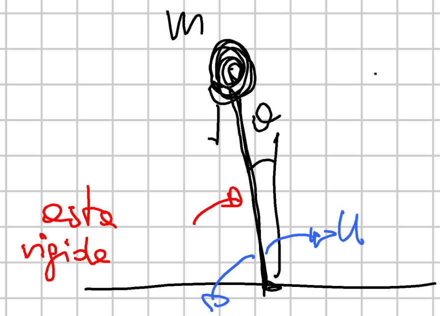
Da questo lemma si dimostra che $Q \geq 0 \Rightarrow W \geq 0$, e si ottiene una teoria analoga a quella di prima.

Sistemi di controllo

Esempio: pendolo invertito

θ angolo con la verticale





(m=1 per semplicità)

$$\ddot\theta = g \sin\theta$$

Per angoli piccoli, $\sin\theta \approx \theta$

$$\ddot\theta = g\theta$$

Se definiamo stato $x(t) = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot\theta \end{bmatrix}\begin{array}{l} x_1 \\ \end{array}$, abbiamo l'equazione

x_2

$$\frac{d}{dt}x(t) = \begin{bmatrix}\dot\vartheta\\ \ddot\vartheta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_2\\ g x_1\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\ g & 0\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}}_{x}$$

L'equazione del moto (questo ϑ è piccolo) è del tipo

$$\begin{cases}\dot x = Ax\\ x_0 \text{ dato}\end{cases}$$

$\Lambda(A) \not\subset LHP \Rightarrow$ il sistema non è stabile.

Aggiungiamo una forza arbitraria $u(t)$ che vorremo andare a scegliere in modo da rendere stabile il sistema:

$$\ddot\vartheta_{(t)} = g\vartheta_{(t)} + u(t) \qquad x = \begin{bmatrix}\vartheta\\ \dot\vartheta\end{bmatrix}$$

$$\dot x = \begin{bmatrix}\dot\vartheta\\ \ddot\vartheta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_2\\ g x_1 + u\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\ g & 0\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}}_{B}u$$

Riusciamo a scegliere $u(t)$ in modo che il sistema sia stabile? Sì, e riusciamo a farlo anche con una scelta semplice: $u(t) = \underbrace{[f_1 \ \ f_2]}_{F}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$ per f_1, f_2 fissati

(possiamo proprio costruire dei sensori che misurano ϑ e $\dot\vartheta$ e applicano una forza proporzionale ad essi)

Il sistema con questa forza è

$$\dot x = Ax + Bu = Ax + BFx = (A+BF)x$$

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ g & 0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} \qquad\qquad [f_1 \ \ f_2]$$

Per avere un sistema stabile, devo fare in modo che

$$\Lambda(A+BF) \subset LHP$$

$$A+BF = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g+f_1 & f_2 \end{bmatrix}.$$

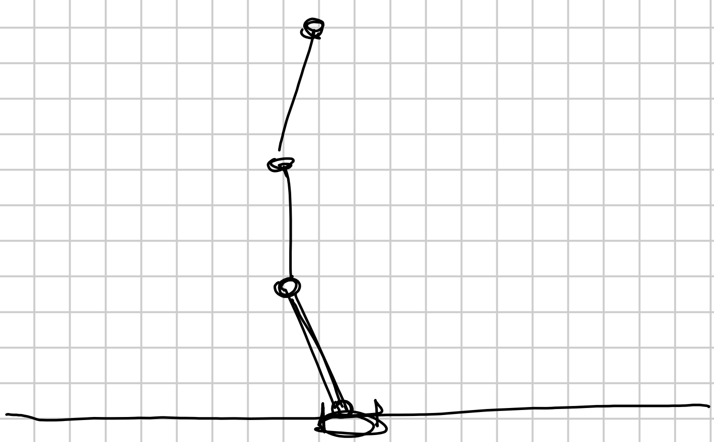
Pol. caratteristico $\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ g+f_1 & f_2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda f_2 - (g+f_1)$

Scegliendo f_1, f_2 riesco a ottenere qualunque polinomio caratteristico, e in particolare a ottenere matrici stabili.

In generale, molti sistemi fisici si riescono a scrivere nella forma

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad \begin{aligned} &x : [0,\infty) \to \mathbb{C}^n \quad \underline{\text{stato}} \\ &A \in \mathbb{C}^{n\times n} \\ &u : [0,\infty) \to \mathbb{C}^m \quad \underline{\text{controllo}} \\ &B \in \mathbb{C}^{n\times m}. \end{aligned}$$

<u>Problema</u>: dire se (e come) possiamo rendere stabile il sistema attorno a 0, oppure farlo arrivare in una data posizione.



ES: riscaldamento di una barretta unidimensionale

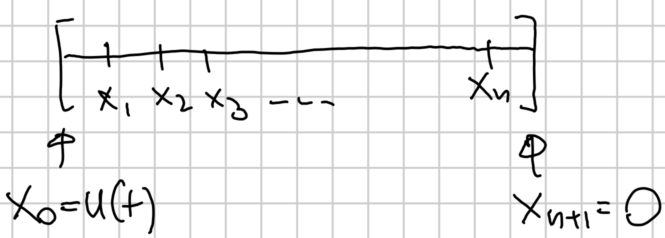
Il punto $y=1$ è tenuto a una temperatura costante di 0 gradi (finestra)

Possiamo modificare la temperatura del punto $y=0$ inserendo calore nel sistema (calorifero)

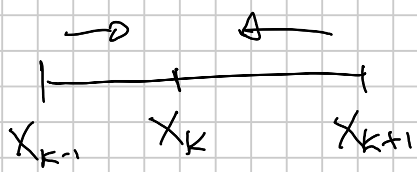
È un problema "infinito-dimensionale": al posto di un vettore x, lo stato è una funzione $x(y,t)$ che dice la temperatura nel punto $y \in [0,1]$ al tempo t.

$$\frac{\partial}{\partial t} x(y,t) = \alpha \frac{\partial^2}{\partial y^2} x(y,t) \qquad x(0,t)=u(t) \qquad x(1,t)=0$$

Lo rimpiazziamo con una versione discretizzata:



stato al tempo t = $x(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$



x_k guadagna o perde calore nel tempo proporzionalmente alle differenze $x_{k+1}-x_k$ e $x_{k-1}-x_k$

$$\dot{x}_k = \alpha\left(x_{k+1}-x_k + x_{k-1}-x_k\right) = \alpha\left(x_{k+1}-2x_k+x_{k-1}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{x(t)} = \alpha \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & -2 \end{bmatrix}}_{A \in \mathbb{C}^{n\times n}} x(t) + \alpha \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{B \in \mathbb{C}^{n\times 1}} u(t)$$

[Dotto, cap 5] $\to$ altri esempi.