Teoria dei controlli

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$x : [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ stato $\qquad A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$u : [0,\infty) \to \mathbb{C}^m$ controllo $\qquad B \in \mathbb{C}^{n\times m}$

Vogliamo trovare una scelta di $u(t)$ (se riusciamo, della forma $u(t) = Fx(t)$) che renda il sistema asintoticam. stabile, cioè $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ per ogni x_0.

Collegato: controllabilità: fissato $t_F > 0$, $x_F \in \mathbb{C}^n$ riusciamo a trovare $u(t)$ tale che $x(t_F) = x_F$

Notare che questo non si riesce a fare in tutti i casi:

es: $A = \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} * \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \iff \begin{cases} * \\ \frac{d}{dt} x_2(t) = A_{22} x_2(t) \end{cases}$$

Questa ha soluzione $x_2(t) = \exp(A_{22}t)\, x_{02}$, indipendentemente da u, e quindi non possiamo controllare / stabilizzare x_2.

Questa struttura a blocchi è sostanzialmente l'unico caso di sistema non stabilizzabile, a meno di un cambio di base del tipo

$$A = M \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} M^{-1} \qquad B = M \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad M \text{ invertibile}$$

Lemma: dati $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, il più piccolo sottospazio S tale che le colonne di B appartengono a S, e S è A-invariante (cioè, $v \in S \Rightarrow Av \in S$) è

$$K(A,B) = \operatorname{Im}\left[B, AB, A^2B, \dots\right]$$

(comb. lineari delle colonne di $B, AB, A^2B, \dots$)

Dim: Se S contiene le colonne di B ed è A-invariante, allora

$\operatorname{Im} B \in S$, $\operatorname{Im} AB \in S$, $\operatorname{Im} A^2B \in S$, ... $K(A,B) \subset S$

Inoltre, $K(A,B)$ è invariante: se $v = \sum_{(\alpha,i,j)} \alpha A^i b_j$, allora

$$Av = \sum_{(\alpha,i,j)} \alpha A^{i+1} b_j .$$

Def: $K(A,B)$ si dice controllable space della coppia (A,B).

La coppia (A,B) si dice controllabile se $K(A,B) = \mathbb{C}^n$.

Osservazioni

- la definizione dipende solo da $\operatorname{Im} B$, quindi:

(A,B) controllabile $\Longleftrightarrow$ (A, BT) controllabile per $T \in \mathbb{C}^{m\times m}$

(A,B) controllabile $\Longleftrightarrow$ $(A, BR^{-1}B^*)$ controllabile $\forall R \in \mathbb{C}^{m\times m}$ invertibile

(A,B) controllabile $\Longleftrightarrow$ $(A-\alpha I, B)$ controllabile $\forall \alpha \in \mathbb{C}$

perché $(A-\alpha I)^k B$ = comb. lin. di $A^j B$ per $j \leq k$

Teo (decomposizione di Kalman) data una coppia (A,B)

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$, esiste una $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tale che

$$M^{-1}AM = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} n_1 & n_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \end{array} & \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \end{array}, \quad M^{-1}B = \begin{array}{cc} & m \\ \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \end{array} & \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

con $n_1 = \dim K(A,B)$, e (A_{11}, B_1) è controllabile.

<u>dim</u>: prendo $M = [M_1 \; M_2]$

M_1: base di $K(A,B) = \text{span}[B, AB, A^2B, \dots]$. M_2: completamento a una base di $\mathbb{C}^n$

Allora, $M^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ è vero perché $\text{Im}\, B \subset \text{Im}\, M_1$ e quindi le colonne di B si scrivono come comb. lin. delle sole colonne di M_1.

Inoltre, $M^{-1}AM$ ha un blocco di zeri in posizione $(2,1)$ perché M_1 è un sottosp. invariante di A (le colonne di AM_1 si scrivono come comb. lin. delle colonne di M_1, senza usare M_2).

(A_{11}, B_1) è controllabile, perché se non lo fosse riuscirei a trovare uno spazio controllabile più piccolo per (A,B):

Se $\text{span}[B_1, A_{11}B_1, A_{11}^2 B_1, \dots]$ ha dimensione strettamente minore di n_1, allora anche

$$\dim \text{span}[M_1B_1, \; M_1A_{11}B_1, \; M_1A_{11}^2B_1, \dots] < n_1$$

$$= \dim \text{span}[MB \quad MAB \quad MA^2B, \dots]$$

$$= \dim \text{span}[B, \; AB, \; A^2B, \dots] \quad \text{perché } M \text{ è invertibile.}$$

<u>Teo</u>: Sono equivalenti:

1) Dati $t_F > 0$, $x_F \in \mathbb{C}^n$, riesco a scegliere una funzione $u(t)$

tale che $x(t_F)=x_F$. (per il sistema $\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$)

2) La coppia (A,B) è controllabile (cioè $\dim K(A,B)=n$).

3) La matrice

$$W_t=\int_0^t \exp(A\tau)BB^* \exp(A^*\tau)\,d\tau$$

è invertibile per ogni $t>0$

4) W_t è invertibile per un $t>0$.

Dim: $1 \Rightarrow 2$ via non-2 $\Rightarrow$ non-1

Supponiamo che $K(A,B)$ è un sottospazio proprio di $\mathbb{C}^n$ che contiene $B, AB, A^2B, \dots$. Allora, anche

le colonne di $\exp(tA)B \in K(A,B)$ per ogni t.

perché $\exp(tA)$ è una funzione della matrice A, e si scrive come un opportuno polinomio $p(A)$

le colonne di $p(A)B \in K(A,B)$

La soluzione di $\dot{x}=Ax+\underbrace{Bu}_{f}$ si scrive esplicitamente come

$$x(t)=\exp(At)x_0+\int_0^t \exp(A(t-\tau))\underbrace{Bu(\tau)}_{f}\,d\tau$$

(da formule di analisi 2 con $Bu(t)=f(t)$)

In particolare $\displaystyle\int_0^t \exp(A(t-\tau))Bu(\tau)\,d\tau \in K(A,B)$

Se scelgo x_F, t_F in modo che

$x_F-\exp(At_F)x_0 \notin K(A,B)$, allora $x(t_F)$ non potrà mai essere uguale a x_F.

$2 \Rightarrow 3$ non-3 $\Rightarrow$ non-2

Ipotesi: $W_t v = 0$ per un certo $t > 0$

$$= \int_0^t \exp(A\tau) B B^* \exp(A^*\tau)\, d\tau$$

Tesi: $K(A,B)$ non è tutto lo spazio $\mathbb{C}^n$.

e in particolare dimostreremo che $K(A,B) \perp v$.

$$0 = v^* W_t v = \int_0^t v^* \exp(A\tau) B B^* \exp(A^*\tau) v \, d\tau$$

$$= \int_0^t \| v^* \exp(A\tau) B \|^2 d\tau$$

Quindi dev'essere che la funzione $\phi(\tau) = v^* \exp(A\tau) B$ è zero ovunque, visto che è continua

$$\phi(0) = 0 \Rightarrow v^* B = 0$$
$$\phi'(0) = 0 \Rightarrow v^* AB = 0$$
$$\phi''(0) = 0 \Rightarrow v^* A^2 B = 0$$
$$\vdots$$

Quindi $v^* \cdot [B, AB, A^2B, \dots] = 0$

e $K(A,B) \subseteq v^\perp$ non è tutto $\mathbb{C}^n$.

$3 \Rightarrow 4$ ovvio

$4 \Rightarrow 1$ Scelgo $u(t) = B^* \exp(A^*(t_F - t))\, y$ con y vettore che ancora non scegliamo

$$x(t_F) = \exp(A t_F) x_0 + \int_0^{t_F} \exp(A(t_F - \tau)) B B^* \exp(A^*(t_F - \tau))\, y \, d\tau$$

$$= \exp(A t_F) x_0 + W_{t_F} \cdot y$$

Visto che W_{t_F} è invertibile, basta scegliere

$$y = W_{t_F}^{-1} (x_F - \exp(A t_F) x_0)$$ per avere $x(t_F) = x_F$.

Possiamo dimostrare un altro criterio di controllabilità:

Teo (test di Hautus / Popov)

Sono equivalenti:

1. (A,B) controllabile
2. rango $[A-\lambda I, B] = n$ per ogni $\lambda \in \Lambda(A)$
3. rango $[A-\lambda I, B] = n$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$.

Notiamo che 3 e 2 sono equivalenti perché se $\lambda \notin \Lambda(A)$, $A-\lambda I$ è invertibile e quindi rango $[A-\lambda I, B] = n$

Dim: $1 \Rightarrow 2$ via non-2 $\Rightarrow$ non 1:

se esiste $v \in \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$, tale che $v^*[A-\lambda I, B] = 0$

allora $v^* A = v^* \lambda$ e $v^* B = 0$, quindi

$$v^* A^k B = \lambda^k v^* B = 0$$

$$\Rightarrow \quad v^*[B, AB, A^2B, \dots] = 0$$

$2 \Rightarrow 1$ tramite non-1 $\Rightarrow$ non-2

Se (A,B) non è controllabile, allora riesco a scrivere (a meno di cambi di base)

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Prendo v autovettore sinistro di A_{22}, allora

$$\begin{bmatrix} 0 & v^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & v^*\lambda \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} 0 & v^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

In particolare, $\begin{bmatrix} 0 & v_2 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} - \lambda I, \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right] = 0$. $\square$

Altro modo di testare controllabilità:

$$W_\infty = \lim_{t\to\infty} W_t = \int_0^\infty \exp(\tau A) B B^* \exp(\tau A^*) \, d\tau$$

è la soluzione dell'equazione di Lyapunov

$$A W + W A^* + B B^* = 0,$$

se $\Lambda(A) \subset LHP$. Allora posso calcolare la soluzione, e questa soluzione è > 0 se e solo se (A, B) controllabile.