$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad A\in\mathbb{C}^{n\times n}$$
$$B\in\mathbb{C}^{n\times m}$$
$$x(0)=x_0 \qquad x:[0,\infty)\to\mathbb{C}^n$$
$$u:[0,\infty)\to\mathbb{C}^m$$

stabilizzabilità : scegliere u in modo che $x(t)\to 0$
controllabilità : scegliere u in modo che $x(t_F)=x_F$

Algoritmo di Bass: data (A,B) controllabili, troviamo F tale che $u(t)=Fx(t)$ è stabilizzante, cioè

$\dot{x} = Ax+BFx = (A+BF)x$ è stabile, cioè $\Lambda(A+BF)\subset LHP$

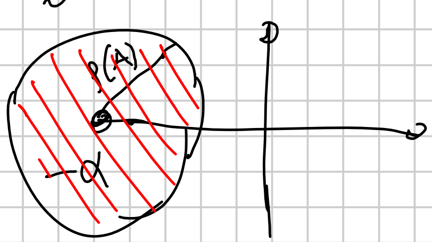
Teorema: se (A,B) controllabile, $\alpha>\rho(A)$, e se W risolve

$$(-A-\alpha I)W + W(-A-\alpha I)^* + 2BB^* = 0$$

allora $F=-B^*W^{-1}$ è un feedback stabilizzante.

Dim: Osserviamo innanzitutto che $(-A-\alpha I, B)$ è controllabile perché $K(A,B)=K(-A-\alpha I,B) \Rightarrow$ la soluzione W è pos. def.

E osserviamo anche che $\Lambda(-A-\alpha I)\subset LHP$:



Scriviamo $2BB^* = BB^*+BB^* = -BFW - WF^*B^*$

$$+AW+\alpha W + WA^* + \alpha W + BFW + WF^*B^* = 0$$
$$(A+BF)W + W(A+BF)^* + \boxed{2\alpha W} = 0$$

W risolve un'altra equazione di Lyapunov con $W \succ 0$, $Q = 2\alpha W \succ 0$.
Questo, per i lemmi visti sulle eq. di Lyapunov, implica che $\Lambda(A+BF) \subset LHP$. $\square$

Esistono coppie (A,B) stabilizzabili, ma non controllabili: ad es.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

con (A_{11}, B_1) controllabile, A_{22} stabile: difatti il blocco $x_2(t)$ è già stabile in questo caso.

Teo: Sono equivalenti:

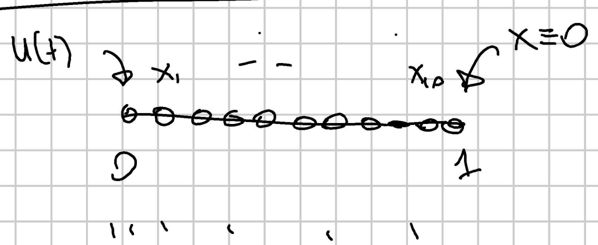
1) esistono $M, A_{11}, A_{12}, A_{22}, B_1$ tali che $A = M \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} M^{-1}$ $B = M \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ con (A_{11}, B_1) controllabile e $\Lambda(A_{22}) \subset LHP$

2) il sistema è stabilizzabile, $\exists\, u(t)$ t.c. $x(t) \to 0$

3) $\operatorname{rank}[A - \lambda I, B] = n \quad \forall \lambda \notin LHP$

4) Esiste F t.c. $\Lambda(A+BF) \subset LHP$.

[Dato]



$$u(t) = B^* \exp(A^*(t_f - t))\, y$$

$$x(t_f) = \exp(At)\, x_0 + W_{t_f}\, y$$

$$W_{t_f} = \int_0^{t_f} dt \cdot \exp(At)\, B B^* \exp(A^* t)$$

Voglio trovare un controllo "migliore degli altri" dal punto di vista dell'energia spesa:

$$V(u) = \int_0^\infty x(t)^* Q\, x(t) + u(t)^* R\, u(t)\, dt$$

per matrici fissate $\underset{n\times n}{Q} \geq 0$ $\underset{m\times m}{R} \geq 0$

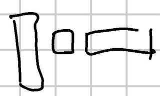
È un problema di calcolo delle variazioni: tra tutte le $u(t)$ in un certo spazio, trovare quella che realizza

$$\min V(u)$$

sotto le condizioni $\dot{x} = Ax + Bu$ $\quad \lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Teo: Dati $Q \geq 0$, $\boxed{R > 0}$, (A, B) controllabile,

poniamo $G = BR^{-1}B^* \in \mathbb{C}^{n\times n}$.



Allora, esiste ed è unica $X = X^*$ tale che:

1) X risolve $A^*X + XA + Q - XGX = 0$ (equazione di Riccati)

2) $\Lambda(A - GX) \subset LHP$,

e la soluzione del problema $\min V(u)$ è data da

$$\min V(u) = x_0^* X x_0, \qquad (\text{si ha } X > 0)$$

ed è data da $u(t) = Fx(t)$ $\qquad F = -R^{-1}B^*X$.

Dim: dimostrare che esiste X con le proprietà in rosso è complicato, e lo faremo lungo le prossime lezioni.

Per ora, concludiamo assumendo che esista.

Innanzitutto notiamo che $A + BF = A - BR^{-1}B^*X = A - GX$, quindi $2 \iff$ la u è un controllo stabilizzante.

(X e quella è detta la "soluzione stabilizzante" dell'eq. di Riccati).

Calcoliamo innanzitutto

$$\frac{d}{dt} x(t)^* X x(t) = (Ax+Bu)^* X x + x^* X (Ax+Bu)$$

$$= x^* A^* X x + u^* B^* X x + x^* X A x + x^* X B u$$

$$= x^* (A^* X + X A) x + u^* B^* X x + x^* X B u$$

$$= x^* (X \underbrace{B R^{-1} B^*}_{G} X - Q) x + u^* B^* X x + x^* X B u + u^* R u - u^* R u$$

$$= \boxed{(u + R^{-1} B^* X x)^* R (u + R^{-1} B^* X x)} - x^* Q x - u^* R u$$

Il pezzo riquadrato in rosso è ≥ 0, ed è $= 0$ solo se scegliamo $u(t) = -R^{-1} B^* X x(t) = F x(t)$

Integrando per t da 0 a ∞ il primo e ultimo termine della catena di uguaglianze, abbiamo

$$\underbrace{\int_0^\infty (x^* Q x + u^* R u)\, dt}_{V(u)} \geq - \int_0^\infty \frac{d}{dt} x^* X x = \underbrace{- x(\infty) X x(\infty)}_{= 0} + x(0)^* X x(0)$$

$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$

Questo dimostra che $V(u) \geq x_0^* X x_0$ per ogni u, e il minimo è ottenuto quando $u(t) = -R^{-1} B^* X x(t) = F x(t) \quad \forall t.$

Rimane aperto: trovare le soluzioni di

$$A^* X + X A + Q - X G X = 0 \qquad \text{dati } A,\ Q \geq 0,\ G \geq 0$$

e in particolare l'unica tale che $X \geq 0$, $\Lambda(A - GX) \subseteq LHP$

Caso scalare: zeri di $gx^2 - 2ax - q = 0$

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + gq}}{g}$$

una negativa

una positiva

Per quella positiva,

$$x = \frac{a + \sqrt{a^2 + gq}}{g}$$

$$a - gx = -\sqrt{a^2 + gq}$$

$\Rightarrow$ esiste $x > 0$ t.c. $\Lambda(a - gx) \subset LHP$.

Prossime lezioni:

Ven 24 16-18

Lun 27 16-18

Mer 29 11-13