Controllo ottimo

Note Title 2024-05-27

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$
$B \in \mathbb{C}^{n\times m}$

Cerchiamo $u(t) = Fx(t)$ tale che
- il sistema sia stabile $\iff \Lambda(A+BF) \subset LHP$
- è minimo $\int_0^\infty x(t)^* Q x(t) + u(t)^* R u(t) \, dt$

$$Q = Q^* \succeq 0 \in \mathbb{C}^{n\times n} \qquad R = R^* \succ 0 \in \mathbb{C}^{m\times m}$$

La soluzione è data da $F = -R^{-1}B^* X$, dove X è una matrice che risolve:

$$\boxed{\begin{aligned} &A^*X + XA + Q - XGX = 0 \\ &\Lambda(\underbrace{A-GX}_{=A+BF}) \subset LHP. \end{aligned}} \qquad G = BR^{-1}B^*$$

(A,B) controll.
(A^*,Q) controll.

$\exists!$ soluzione a questo problema $X = X^* \succ 0$

Se X risolve (R) $A^*X + XA + Q - XGX = 0$, allora

$$\begin{bmatrix} A & -G \\ -Q & -A^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} (A - GX) \iff \begin{aligned} &A - GX = A - GX \\ &-Q - A^*X = X(A-GX) \end{aligned}$$

È un problema di sottospazi invarianti: troviamo un sottosp. invariante di $H = \begin{bmatrix} A & -G \\ -Q & -A^* \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$ di dimensione n.

H è detta <u>matrice Hamiltoniana</u>.

Nel caso generico, H ha $2n$ autovalori distinti $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_{2n}$ con autovettori $v_1, v_2, \dots v_{2n}$

Prendendo $\mathcal{U} = \text{span}($ n qualunque di questi autovettori$)$ otteniamo un sottosp. invariante.

Dato un sottosp. invariante di dimensione n, $\mathcal{U} = \text{span}\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$

$U_1, U_2 \in \mathbb{C}^{n \times n}$ è possibile costruire una soluzione di (R) se U_1 è invertibile:

$$\begin{bmatrix} A & -G \\ -Q & -A^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} S$$

Cambiamo base: $\mathcal{U} = \text{span}\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \text{span}\begin{bmatrix} I \\ U_2 U_1^{-1} \end{bmatrix} U_1 = \text{span}\begin{bmatrix} I \\ U_2 U_1^{-1} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} A & -G \\ -Q & -A^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I \\ U_2 U_1^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ U_2 U_1^{-1} \end{bmatrix} U_1 S U_1^{-1}$$

Se pongo $X = U_2 U_1^{-1}$, le due righe di questa uguaglianza mi dicono che

$$A - GX = U_1 S U_1^{-1} \qquad -Q - A^* X = X(U_1 S U_1^{-1}) = X(A - GX)$$

Nel caso generico, ho $\binom{2n}{n}$ soluzioni della (R).
Come trovo una soluzione stabilizzante? Devo fare in modo che $\Lambda(A-GX) = \Lambda(S)$ sia tutto nel semipiano sinistro. Questo lo ottengo prendendo i v_i associati ad autovalori $\lambda_i \in LHP$. Dimostreremo ora che sono sempre esattamente n.

Lemma: Sia $H = \begin{bmatrix} A & -G \\ -Q & -A^* \end{bmatrix}$ con $G = G^*$, $Q = Q^*$, allora

$\Lambda(H)$ è simmetrico rispetto all'asse immaginario.

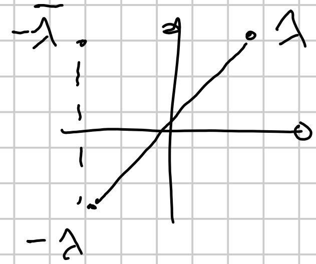
Dim: Poniamo $J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$

Allora, $J^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I & 0 \end{bmatrix} = -J$ e

$$J^{-1}HJ = -H^* : \begin{bmatrix}0 & -I\\ I & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & -G\\ -Q & -A^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & I\\ -I & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}Q & A^*\\ A & -G\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-A^* & Q\\ G & A\end{bmatrix}$$

$$= H^*$$

Quindi H e $-H^*$ sono simili, e hanno gli stessi autovalori (con molteplicità)



$$\lambda \in \Lambda(H) \Rightarrow -\bar\lambda \in \Lambda(-H^*) \Rightarrow -\bar\lambda \in \Lambda(H)$$

$-\bar\lambda$ è il simmetrico rispetto all'asse imm. di λ. □

(c'è dietro un prodotto scalare indefinito, quello associato a J

$\langle u,v\rangle = u^* J v = u_1 v_2 - u_2 v_1$. Difatti $JH = -H^* J \iff$

$u^* J H v = -u^* H^* J v \quad \forall u,v \iff \langle u, Hv\rangle = -\langle Hu, v\rangle$

H è antisimmetrica rispetto a questo prodotto scalare)

Se gli autovalori sono simmetrici rispetto all'asse immaginario, saranno $n \in LHP$, $n \in RHP$, a patto che dimostriamo che nessuno è immaginario puro.

Teo: Supponiamo che $Q \succeq 0$ $G \succeq 0$ $\left(G = BR^{-1}B^* \quad \square\,\square\,\square \succeq 0\right)$

o (A,G), perché hanno lo stesso spazio delle colonne.

(A,B) stabilizzabile, (A^*,Q) stabilizzabile. Allora, H non ha autovalori immaginari puri.

Dim: supponiamo per assurdo

$$\begin{bmatrix}A & -G\\ -Q & -A^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix} = i\omega\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix} \iff \begin{cases}Az_1 - Gz_2 = i\omega z_1\\ -Qz_1 - A^*z_2 = i\omega z_2\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (A - i\omega I) z_1 = G z_2 \\ (A - i\omega I)^* z_2 = -Q z_1 \end{cases}$$

Voglio ottenere una relazione senza $(A-i\omega I)$

$$0 = z_2^*(A - i\omega I) z_1 - z_2^*(A-i\omega I) z_1 = z_2^* G z_2 + z_1^* Q z_1$$

$z_1^* Q z_1 + z_2^* G z_2 = 0 \iff Q z_1 = 0$ e $G z_2 = 0$, visto che $Q \succeq 0$, $G \succeq 0$.

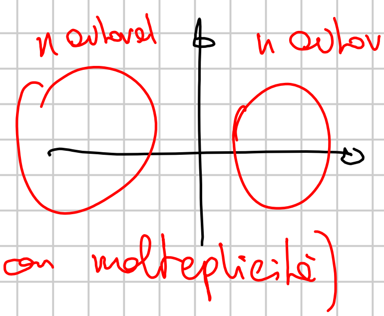
Sostituendo sopra, abbiamo $(A-i\omega I) z_1 = (A-i\omega I)^* z_2 = 0$
cioè,

$$z_1^* \begin{bmatrix} A^* + i\omega & Q \end{bmatrix} = 0 \qquad z_2^* \begin{bmatrix} A - i\omega & G \end{bmatrix} = 0$$

Poiché $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$ è un autovettore, $z_1 \neq 0$ oppure $z_2 \neq 0$

se $z_2 \neq 0$, allora $z_2^* \begin{bmatrix} A - i\omega I & G \end{bmatrix} = 0$ contraddice la stabilizzabilità di (A, G), e analogamente $z_1 \neq 0 \Rightarrow$ contraddice stab. (A^*, Q).

□

$\Lambda(H) =$ 

Possiamo considerare $\mathcal{U} = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$ l'unico sottosp. invariante associato agli n autovalori nel semipiano sinistro.

Possiamo scrivere

$$(*) \qquad H = V \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} n & n \end{array} \\ \begin{array}{c} n \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} J_- & 0 \\ 0 & J_+ \end{bmatrix} \end{array} V^{-1} \qquad \begin{array}{l} \Lambda(J_-) \subset LHP \\ \Lambda(J_+) \subset RHP \end{array}$$

Ci manca di dimostrare che U_1 è invertibile, lo faremo dopo (spero).

Ora dimostriamo alcune altre proprietà

Lemma: $\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$ è tale che $\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}^* J \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = 0$

$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$ (geometricamente, vale $\langle u, u \rangle = 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}$)

($\mathcal{U}$ è un sottospazio Lagrangiano per J)

Dim: Andiamo a guardare la $(*)$. $\mathcal{U} = \mathrm{span}(v_1, \dots, v_n)$ (prime n colonne di V).

Scriviamo la trasposta coniugata:

$$-H^* = V^{-*} \begin{bmatrix} -J_-^* & 0 \\ 0 & -J_+^* \end{bmatrix} V^* = J^{-1} H J$$

$$H = J V^{-*} \begin{bmatrix} -J_-^* & 0 \\ 0 & -J_+^* \end{bmatrix} V^* J^{-1} = H$$

$\not{+}$

$\Rightarrow$ Le ultime n colonne di JV^{-*} sono una base del sott. inv. stabile di H e le prime n colonne sono una base del sott. inv. anti-stabile di H

cioè $J \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$ e $J \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$ sono ortogonali.

$$0 = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = -U_2^* U_1 + U_1^* U_2 \qquad \square$$

Lemma: La sol. stabilizzante $X = U_2 U_1^{-1}$ è simmetrica

$$X - X^* = U_2 U_1^{-1} - U_1^{-*} U_2^* = U_1^{-*} \boxed{\left(-U_2^* U_1 + U_1^* U_2\right)} U_1^{-1}$$

$= 0$

Lemma La sol. stabilizzante X è def. positiva

$$0 = A^* X + XA + Q - XGX - XGX + XGX = X(A - GX) + (A - GX)^* X + Q + XGX$$

Poiché $A-GX$ stabile, $Q+XGX \geq 0 \Rightarrow X \geq 0$

Utilizzando controllabilità di (A^*, Q), si riesce a dimostrare che $X > 0$.

Si ha la seguente fattorizzazione:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -X & 1 \end{bmatrix} H \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ X & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -X & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -G \\ -Q & -A^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ X & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -G \\ -XA-Q & +XG-A^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ X & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A-GX & -G \\ -XA-Q+XGX-A^*X & -(A-GX)^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-GX & -G \\ 0 & -(A-GX)^* \end{bmatrix}.$$

da cui si vede bene che $\Lambda(H) = \Lambda(A-GX) + \Lambda(-(A-GX)^*)$ e $\Lambda(-(A-GX)^*)$ sono i "$-\bar{\lambda}$"

<u>Lemma</u>: $G \geq 0$, $Q \geq 0$, (A, G) stabilizz., (A^*, Q) stabilizz. $\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$ base del sott. inv. stabile. Allora, U_1 è invertibile.

<u>Dim</u>: Mostriamo che $\operatorname{Ker} U_1$ è un sottosp. inv. di $A-GX$

Prendiamo $v \in \operatorname{Ker}(U_1)$

$$\begin{bmatrix} U_2^* & -U_1^* \end{bmatrix} H \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} U_2^* & -U_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}}_{= 0} (A-GX)$$

Quindi

$$0 = v^* \begin{bmatrix} U_2^* & -U_1^* \end{bmatrix} H \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} v^* U_2^* & 0 \end{bmatrix} H \begin{bmatrix} 0 \\ U_2 v \end{bmatrix}$$

$$= -v^* U_2^* G U_2 v$$

Poiché $G \geq 0$, dev'essere $G U_2 v = 0$

$$\begin{bmatrix} A & -G \\ -Q & -A^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} (A - GX) v$$

1ª riga: $\cancel{A U_1 v} - \cancel{G U_2 v} = U_1 (A - GX) v$

$U_1 v = 0 \quad G U_2 v = 0$

$\Rightarrow$ $v \in \ker U_1$ implica $(A-GX) v \in \ker U_1$

Se $\ker U_1$ non è vuoto, allora deve esistere un autovettore di $(A-GX)$ dentro $\ker U_1$

$\Rightarrow \exists\, w$ tale che $U_1 w = 0 \quad (A-GX) w = w \lambda \quad \lambda \in LHP$

Allora $\quad -Q \underbrace{U_1 w}_{0} - A^* U_2 w = U_2 \underbrace{(A - GX) w}_{w \lambda}$

$$-A^* U_2 w = U_2 w \lambda \qquad G U_2 w = 0$$

$$(U_2 w)^* \left[(A + \lambda I)^* \quad G \right] = 0 \qquad -\lambda \notin LHP$$

che contraddice stabilizzabilità.