Example: square root

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & & \\ & 4 & 1 & \\ & & 4 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad f(x) = \sqrt{x}$$

We look for an interpolating polynomial with

$$p(0) = 0,\ p(4) = 2,\ p'(4) = f'(4) = \frac{1}{4},\ p''(4) = f''(4) = -\frac{1}{32}.$$

I.e., $p(x) = p_3 x^3 + p_2 x^2 + p_1 x + p_0 \Rightarrow p'(x) = 3p_3 x^2 + 2p_2 x + p_1$

$$\begin{array}{r l} \begin{array}{r} p(0)=0 \\ p(4)=2 \\ p'(4)=\frac{1}{4} \\ p''(4)=-\frac{1}{32} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4^3 & 4^2 & 4 & 1 \\ 3 \cdot 4^2 & 2 \cdot 4 & 1 & 0 \\ 6 \cdot 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3 \\ p_2 \\ p_1 \\ p_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{32} \end{bmatrix}, \end{array}$$

$$p(x) = \frac{3}{256} x^3 - \frac{5}{32} x^2 + \frac{15}{16} x.$$

Example – continues

$$p(A) = \frac{3}{256}A^3 - \frac{5}{32}A^2 + \frac{15}{16}A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{4} & \frac{1}{64} & \\ & 2 & \frac{1}{4} & \\ & & 2 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}.$$

(One can check that $f(A)^2 = A$.)

Teo: per ogni scelta di nodi e molteplicità λ_i, $i=1,\dots k$, $m_i \geq 1$, la matrice che corrisponde a imporre le condizioni di interpolazione $p^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_i)$, con $j < m_i$, $i = 1, \dots k$ (Vandermonde generalizzato) è invertibile.

Dim: Se avesse un Kernel,

$$V \cdot \begin{bmatrix} q_n \\ \vdots \\ q_1 \\ q_0 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{per un vettore con } q_i \text{ non tutti nulli}$$

Allora il polinomio $q_0 + q_1 x + \dots + q_n x^n = q(x)$ soddisfa $q^{(j)}(\lambda_i) = 0$ per ogni $j < m_i$, $i = 1, 2, \dots k$

Queste sono $n+1$ condizioni che mi dicono che $(x-\lambda_i)^{m_i} \mid q(x)$ per ogni $i \Rightarrow q(x)$ è un multiplo di $(x-\lambda_1)^{m_1} \dots (x-\lambda_k)^{m_k}$

Quindi $q(x)$ sarebbe un polinomio non nullo, multiplo di un certo polinomio di grado $n+1$, e di grado n $\rightsquigarrow$ impossibile

---

(più complicato: fissata $f(x)$, il poli. di interpolazione è una funzione continua del multi-insieme di nodi $\{\underbrace{\lambda_1, \lambda_1, \dots \lambda_1}_{m_1 \text{ volte}}, \underbrace{\lambda_2, \dots \lambda_2}_{m_2 \text{ volte}}, \dots \underbrace{\lambda_k, \dots \lambda_k}_{m_k \text{ volte}}\})$

Example – square root

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad f(x) = \sqrt{x}$$

does not exist (because $f'(0)$ is not defined).

(Indeed, there is no matrix such that $X^2 = A$.)

(perché X dev'essere una matrice nilpotente ($X^4 = A^2 = 0$), ma una 2×2 nilpotente ha sempre $X^2 = 0$)

Example – matrix exponential

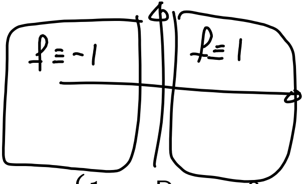
$$A = S \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix} S^{-1}, \quad f(x) = \exp(x).$$

$$\exp(A) = S \begin{bmatrix} \boxed{e^{-1}} & & & \\ & \boxed{1} & & \\ & & \boxed{e} & e \\ & & & \boxed{e} \end{bmatrix} S^{-1}$$

$f'(1)$

Can also be obtained as $I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \dots$
(not so obvious, for Jordan blocks…)

Example – matrix sign



$$A = S \begin{bmatrix} -3 & & & \\ & -2 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix} S^{-1}, \quad f(x) = \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \operatorname{Re} x > 0, \\ -1 & \operatorname{Re} x < 0. \end{cases}$$

non definita se $\operatorname{Re} x = 0$

$$f(A) = S \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} S^{-1}.$$

Not constant (for general S).

Instead, we can recover stable / unstable invariant subspaces of A as $\ker(f(A) \pm I)$.

If we found a way to compute $f(A)$ without diagonalizing, we could use it to compute eigenvalues via bisection...

<u>Teo</u>: se $f(x)$ è tale che $f(\bar{x}) = \overline{f(x)}$, allora $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$. E in particolare se A reale $f(A)$ reale.

<u>Dim</u>: se A è diagonalizzabile, $A = VDV^{-1}$

$$\bar{A} = \bar{V}\bar{D}\bar{V}^{-1}$$

perché è un polinomio

$$f(\bar{A}) = f(\bar{V}\bar{D}\bar{V}^{-1}) = \bar{V} f(\bar{D}) \bar{V}^{-1} = \bar{V}\, \overline{f(D)}\, \bar{V}^{-1} =$$

$$= \overline{V f(D) V^{-1}} = \overline{f(A)}$$

Se A non è diagonalizzabile,

$f(A) = \lim f(A_k)$ per una successione di A_k diagonalizzabili, e $f(A_k)$ sono tutte reali

Se $A = \left[U_1 \middle| U_2\right] \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix} \left[U_1 \middle| U_2\right]^{-1}$, dove gli

autoval. di L_1 hanno $Re(\lambda) < 0$,

" " L_2 " $Re(\lambda) > 0$, allora

$$\operatorname{sign}(A) = \left[U_1 \middle| U_2\right] \operatorname{sign}\left(\begin{array}{c|c} L_1 & 0 \\ \hline 0 & L_2 \end{array}\right) \left[U_1 \middle| U_2\right]^{-1} =$$

$$= \left[U_1 \middle| U_2\right] \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \left[U_1 \middle| U_2\right]^{-1}$$

$$\operatorname{sign}(A) - I = \left[U_1 \middle| U_2\right] \begin{bmatrix} -2I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left[U_1 \middle| U_2\right]$$

$\operatorname{Ker}\left(\operatorname{sign}(A) - I\right) = U_2 = \operatorname{span}\left\{\begin{array}{l} \text{autovettori relativi a autoval.} \\ \text{nel semipiano destro} \end{array}\right\}$

Se avessi un modo di calcolare $\mathrm{sgn}(A)$ che non passa da calcolo di autoval / autovettori potrei usarlo per calcolare autovettori per bisezione:

1. Calcola $\mathrm{sign}(A) = S$
2. Calcola $U_1 = \mathrm{Ker}(S+I)$, $U_2 = \mathrm{Ker}(S-I)$
3. Coniuga $A \sim [U_1\ U_2]^{-1} A [U_1\ U_2] = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right]$
4. Ripeti su $A_1 - \left(\frac{1}{n_1} \mathrm{Tr} A_1\right) I$

    e $A_2 - \left(\frac{1}{n_2} \mathrm{Tr} A_2\right) I$

Example – complex square root

eig$(A) = \pm i$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{f(x) = \sqrt{x}}$$

We can play around with branches: let us say $f(i) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$, $f(-i) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$.

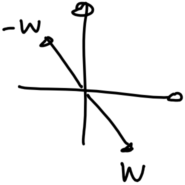
Polynomial: $\boxed{p(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + x).}$

$$f(A) = p(A) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

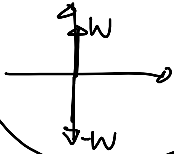
(This is the so-called principal square root – we have chosen the values of $f(\pm i)$ in the right half-plane — other choices are possible).

(We get a non-real square root of A, if we choose non-conjugate values for $f(i)$ and $f(-i)$)

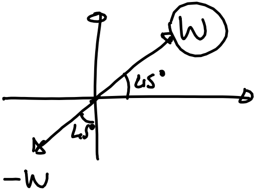
Prendo $f(x)$ = ramo principale della radice quadrata: $f(z)$ è l'unico complesso w che sta nel semipiano destro e $w^2 = z$



Ben definita a patto che z non sia reale negativo

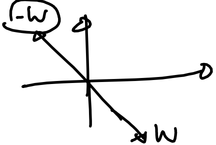


Radici quadrate di i:



$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

Radici di $-i$:



$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$$

Se scelgo invece $f(i) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$,

$f(-i) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$

$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(i - ix)$

$$f(A) = p(A) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} i & -i \\ i & i \end{bmatrix}$$

Soddisfano entrambe $f(A)^2 = A$

Example – nonprimary square root

With our definition, if we have

$$A = S \begin{bmatrix} \boxed{1} & & \\ & \boxed{1} & \\ & & 2 \end{bmatrix} S^{-1}, \quad f(x) = \sqrt{x}$$

we cannot get

$$f(A) = S \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & \sqrt{2} \end{bmatrix} S^{-1}:$$

(esistono solo se A ha blocchi di Jordan con lo stesso autovalore)

either $f(1) = 1$, or $f(1) = -1 \dots$

This would also be a solution of $X^2 = A$, though.

Non-primary square roots of A