$$\mathrm{vec}(AXB) = \boxed{}\ \mathrm{vec}\, X$$

$$(AXB)_{1,1} = \sum_{h,k} A_{1h} X_{hk} B_{k1} =$$

$$\left[A_{11}B_{11} \ A_{12}B_{11} \cdots A_{1m}B_{11} \,\middle|\, A_{12}B_{11} \ \cdots \right] \cdot \begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{21} \\ \vdots \\ X_{m1} \\ X_{12} \\ X_{22} \\ \vdots \\ X \\ \vdots \\ X_{mn} \end{bmatrix}$$

Matrice risultante:

$$B^{T} \otimes A =$$

⚠ Anche se complessi senza coniugato

$$\begin{bmatrix} b_{11}A & b_{21}A & \cdots & b_{m1}A \\ b_{12}A & b_{22}A & \cdots & b_{m2}A \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

Teo: $\operatorname{vec}(AXB) = (B^T \otimes A) \operatorname{vec} X$

Teo

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = A \cdot C \otimes B \cdot D$$

(quando le dim. sono compatibili)

Dim.:

$$(A \otimes B)\underbrace{(C \otimes D) \operatorname{vec} X} = A \otimes B \cdot \operatorname{vec}(D X C^T)$$

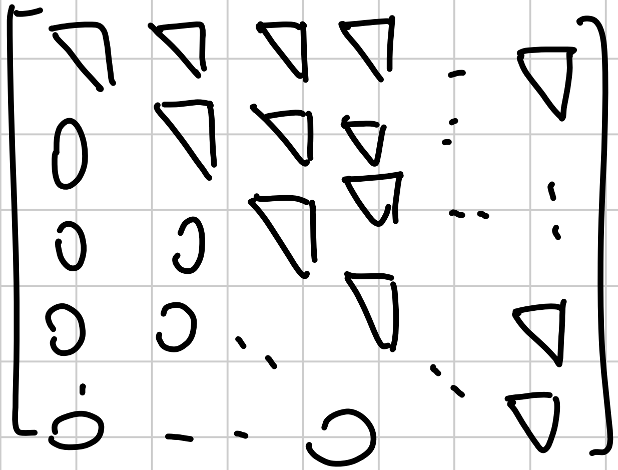
$$= \operatorname{vec}((B D) X (C^T A^T)) = (AC \otimes BD) \operatorname{vec} X \qquad \square$$

$$(Q_1 \otimes Q_2)(Q_1 \otimes Q_2)^T = (Q_1 \otimes Q_2)(Q_1^T \otimes Q_2^T) =$$

$$= Q_1 Q_1^T \otimes Q_2 Q_2^T = I \otimes I = \begin{bmatrix} 1 \cdot I & 0 \cdot I & 0 \cdot I & \cdots \\ & 1 \cdot I & & \ddots \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \cdot I \end{bmatrix}$$

diag $\otimes$ diag = diag

triangolare sup $\otimes$ tri. sup = tri. sup



$$A \otimes B = (U_1 S_1 V_1^*) \otimes (U_2 S_2 V_2^*) = (U_1 \otimes U_2)\underbrace{(S_1 \otimes S_2)}(V_1 \otimes V_2)^*$$

sulla diagonale, tutti i prodotti $\sigma_i \tau_j \quad i,j = 1, \dots, n$

dove $(\sigma_i) = \text{svd}(A)$, $(\tau_j) = \text{svd}(B)$

Corollario: $\|A \otimes B\|_2 = \|A\|_2 \cdot \|B\|_2 \quad (\max \sigma_i \tau_j = \max \sigma_i \cdot \max \tau_j)$

$$\underbrace{AX \cdot I_n}_{} - I_m \cdot XB = C \qquad A \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad B \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad X, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$= \text{vec}(AXI) - \text{vec}(IXB) = \text{vec}\, C$$

$$= (I_n \otimes A)\, \text{vec}\, X - (B^T \otimes I_m)\, \text{vec}\, X = \text{vec}\, C$$

$$= \underbrace{\Big(\overset{n\times n}{I_n} \otimes \overset{m\times m}{A} - \overset{n\times n}{B^T} \otimes \overset{m\times m}{I_m}\Big)}_{\boxed{T}} \operatorname{vec} X = \operatorname{vec} C$$

$$\boxed{T} \cdot \operatorname{vec} X = \operatorname{vec} C$$

Sol. unica per ogni $C \iff T$ invertibile

Schur: $A = Q_A T_A Q_A^*$ $\quad T_A$ tr. sup.

$B^T = Q_B T_B Q_B^*$ $\quad T_B$ tr. sup.

$$T = \Big(\underbrace{I_n}_{= Q_B Q_B^*} \otimes Q_A T_A Q_A^* - Q_B T_B Q_B^* \otimes \underbrace{I_m}_{= Q_A Q_A^*}\Big)$$

$$= \underbrace{(Q_B \otimes Q_A)}_{\text{Orth.}} \underbrace{(I_n \otimes T_A - T_B \otimes I_m)}_{} \underbrace{(Q_B \otimes Q_A)^*}_{\text{Orth.}}$$

$$\begin{bmatrix} \triangle & & & \\ & \triangle & & \\ & & \ddots & \\ & & & \triangle \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \setminus & \setminus & \setminus & \cdots & \setminus \\ \setminus & \setminus & \setminus & & \vdots \\ & \setminus & \setminus & \setminus & \\ & & \setminus & \setminus & \setminus \\ & & & \setminus & \setminus \end{bmatrix}$$

sullo diagonale, $(T_A)_{ii} - (T_B)_{jj}$, $i = 1, \dots m$, $j = 1, \dots n$

$(T_A)_{ii}$ = autoval. di A

$(T_B)_{jj}$ = autoval. di B^T = autoval. di B

T invertibile $\Leftrightarrow \Lambda(A) \cap \Lambda(B) = \emptyset$. $\square$

Se formo T e risolvo il sys. lineare con Gauss, LU, QR, costo $= O(m^3 n^3)$

mn passi di GMRES/CG: $mn \cdot$

Calcolare $(I \otimes A - B^T \otimes I) \cdot v = \text{vec}(AV - VB)$

dove V è t.c. $\text{vec}\, V = v$

$O(m^2 n^2)$ $\qquad$ $O(m^2 n + m n^2)$

Si risparmia qualcosa (ma poco)

<u>Bartels-Stewart</u>: algoritmo con costo $O(m^3 + n^3)$

per risolvere $AX - XB = C$

<u>Idea</u>: sfrutta la fatt. vista prima

$$T = I \otimes A - B^T \otimes I = (Q_B \otimes Q_A)(I \otimes T_A - T_B \otimes I)(Q_B \otimes Q_A)^*$$

$$\operatorname{vec} X = T^{-1} \operatorname{vec} C = (Q_B \otimes Q_A)(I \otimes T_A - T_B \otimes I)^{-1}(Q_B \otimes Q_A)^* \operatorname{vec} C$$

- $(Q_B \otimes Q_A)^* \operatorname{vec} C = \operatorname{vec}(Q_A^* C \overline{Q_B})$ ⟶ costo cubico $O(m^2 n + n^2 m)$

- $(I \otimes T_A - T_B \otimes I)^{-1} y$: back-substitution

$O(\cancel{(mn)}^2)$ $\quad O(nnz) = O(mn(m+n))$ cubico

$+O(m^3+n^3)$ per le forme di Schur

Detto in modo alternativo:

1) Mi riduco a una Sylvester triangolare:

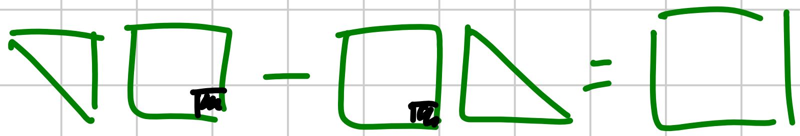
$$AX - XB = C$$

(facciamo solo <u>reali</u> per semplicità)

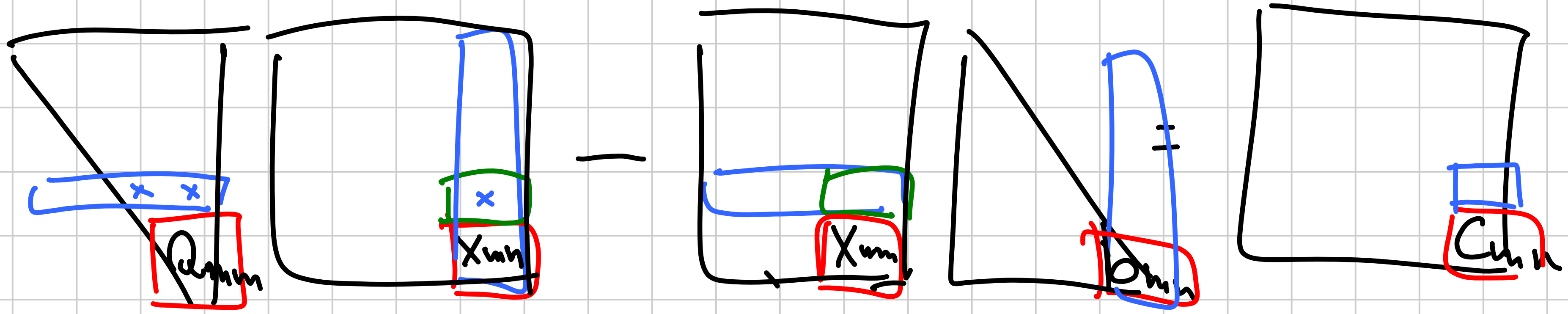
$$Q_A T_A Q_A^T X - X Q_B T_B^T Q_B^T = C$$

$$T_A \underbrace{Q_A^T X Q_B}_{\hat{X}} - \underbrace{Q_A^T X Q_B}_{\hat{X}} T_B^T = \underbrace{Q_A^T C Q_B}_{\hat{C}}.$$

$$T_A \hat{X} - \hat{X} T_B^T = \hat{C}$$



Riesco a risolvere una Sylv. con coeff. triangolari a partire da $X_{m,n}$ tornando in su:



ultima equazione (m,n): $a_{mm} \cdot x_{mn} - x_{mn} b_{nn} = c_{mn}$

$(m-1,n)$: $a_{m-1,m-1} x_{m-1,n} - \underbrace{a_{m-1,m} x_{mn}}_{\text{noto}} - x_{m-1,n} b_{n,n} = c_{m-1,n}$

(eq. scalari risolubili se $\Lambda(A) \cap \Lambda(B) = \emptyset$)

- $AX - XB = C$
- $\underline{M \cdot \mathrm{vec}\, X = \mathrm{vec}\, C}$, $\quad M = I \otimes A - B^T \otimes I$

$\tilde{X}$ calcolato risolve esattamente $(\underbrace{M+\delta M}_{})\tilde{X} = \mathrm{vec}(C+\delta C)$

Però, $\delta M \neq I \otimes \delta A - \delta B^T \otimes I$

e anche <u>non</u> è vero che $(A+\delta A)\tilde{X} - \tilde{X}(B+\delta B) = C+\delta C$

Idea: vorrei trovare $\delta A, \delta B, \delta C$ t.c.

$$\underbrace{\delta A \cdot \tilde{X} - \tilde{X} \cdot \delta B - \delta C}_{} = \underbrace{C - (A\tilde{X} - \tilde{X}B)}_{}$$

posso aspettarmi che sia piccolo, è il residuo ottenuto risolvendo $M \mathrm{vec} X = \mathrm{vec}\, C$ con un metodo stabile all'indietro

$R := C - (A\tilde{X} - \tilde{X}B)$, residuo

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}^T \otimes I & -I \otimes \tilde{X} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta A \\ \delta B \\ \delta C \end{bmatrix} = \operatorname{vec} R$$

$$\begin{bmatrix} \delta A \\ \delta B \\ \delta C \end{bmatrix} = \operatorname{pinv}\left(\begin{bmatrix} \tilde{X}^T \otimes I & -I \otimes \tilde{X} & -I \end{bmatrix} \right) \cdot \operatorname{vec} R$$

Dipende dai val. sing. di $\begin{bmatrix} \tilde{X}^T \otimes I & -I \otimes \tilde{X} & -I \end{bmatrix}$ se si riesce o no a trovare δA, δB, δC piccoli quando R piccolo

---

Applicazioni di Sylvester: disaccoppiare blocchi diagonali

$$\begin{bmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

$=$

$$\begin{bmatrix} A & \underbrace{AX-XB+C} \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

se scelgo X che risolve $AX-XB=-C$, il blocco $(1,2)$ si annulla

Schur form: $M \to T_M$ con trasf. ortogonali

M è anche simile a una diagonale D_M, se non ha blocchi di Jordan non banali, ma la similitudine che manda $M \to D_M$ <u>non</u> è ortogonale

$V^{-1}MV = D_M$, V in gen. non è ortogonale se $K(I\otimes A - B^T \otimes I)$ è alto, a C piccolo corrisponde X grande, e la trasformazione per similitudine che azzera il blocco $(1,2)$ è mal condizionata

$$K\left(\begin{bmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \text{ alto}$$

<u>ES</u>: caso scalare: se voglio una similitudine che trasforma

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \text{ in } \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix},$$ essa sarà

$$\begin{bmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

dove x risolve $(\lambda-\mu)x = -1$

$$x = -\frac{1}{\lambda-\mu}$$

se $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, non esiste una trasf. per similitudine che lo mandi in $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$