$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \qquad \text{se} \quad \lambda \neq \mu$$

Problema: riordinare autovalori nella Schur form

$$\begin{bmatrix} x & & & & & \\ & x & & & & \\ & & x & & & \\ & & & x & & \\ & & & & x & \\ & & & & & x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x & x & x & x \\ & 2 & x & x & x \\ & & 3 & x & x \\ & & & 4 & x \\ & & & & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & x & x & x & x \\ & 4 & x & x & x \\ & & 2 & x & x \\ & & & 3 & x \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -X \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \cdot \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

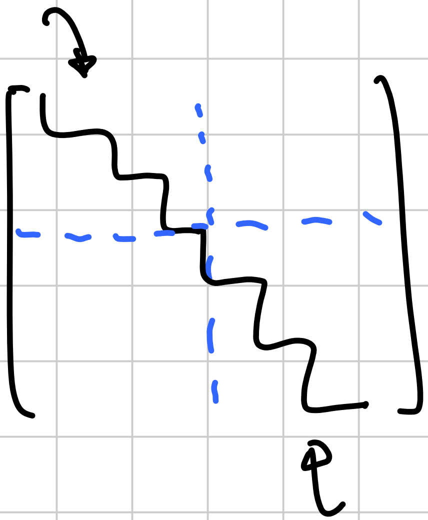
Se X risolve un'opportuna $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ eq. di Sylvester

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$$

scambia la posizione di B, A sulla diagonale

Se prendo $Q = \mathrm{orth}\left(\begin{bmatrix} X & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$, allora

$$Q^T \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} B & \times \\ 0 & A \end{bmatrix}.$$



(i blocchi sono già triangolari, risparmio un po' di lavoro in Bartels-Stewart)

U_1 base di $\mathcal{U}$ $\quad U = [U_1 \ U_2] \in \mathbb{C}^{m \times m}$ base di $\mathbb{C}$

$U_1 \in \mathbb{C}^{m \times n}$ $\quad \mathcal{U}$ sottosp. invariante per M, i.e. $M\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}$

$$MU_1 = U_1 \cdot A \quad \text{per una certa } A \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

$$\boxed{M}\,\boxed{U_1} = \boxed{U_1}\,\boxed{A} \qquad \Lambda(A) \subseteq \Lambda(M)$$

$$M \underbrace{\left[U_1 \,\middle|\, U_2 \right]}_{U} = \underbrace{\left[U_1 \,\middle|\, U_2 \right]}_{U} \left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array} \right]$$

$$U^{-1} M U = \left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array} \right]$$

$U^{-1}MU$ triang. a blocchi $\Longleftrightarrow$ U_1 sottosp. invariante per M

__ES__: se $Mv = \lambda v$, allora $U = \text{span}(v)$ è un sottosp. invariante

se $Mv_i = \lambda_i v_i$, $i = 1, 2, \dots k$, allora $U = \text{span}\{v_1, v_2, \dots v_k)$ è invariante

$$M \underbrace{(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k)}_{\text{vettore generico} \in U} = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_k \lambda_k v_k \in U$$

---

es. $M = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ sottosp. invarianti:

$\{0\}$, $\mathbb{C}^2$, $\text{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a + b \\ \lambda b \end{bmatrix}$$

quando $\begin{pmatrix} \lambda a + b \\ \lambda b \end{pmatrix}$ è un multiplo di $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$?

quando $\begin{bmatrix} \lambda a + b \\ \lambda b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{bmatrix}$ è multiplo di $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. i.e.

$\begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$ molt. di $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, cioè solo se $b=0$

$$M = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}}_{k \times k}$$

ha sottosp. invarianti

$\{0\}$, $\mathrm{span}(e_1)$, $\mathrm{span}(e_1, e_2)$, ...

$\mathrm{span}(e_1, e_2, e_3)$, ... $\mathrm{span}(e_1, e_2, \dots e_k) = \mathbb{C}^k$

Se $MU_1 = U_1 A$ e $Au = \lambda u$, allora

$U_1 \cdot u$ è autovettore di M di autovel. λ, i.e.

$$MU_1 u = U_1 A u = U_1 \lambda u = \lambda (U_1 u)$$

Se A diagonalizzabile, $\mathbb{C}^n = \text{span}(u_1, \dots u_n)$ autovett. di A

$\mathcal{U}_1 = \text{span}\left(U_1 u_1, U_1 u_2, \dots U_1 u_k\right) = \text{span}$ di alcuni autovett. di M

Es: $\left\{ x : \lim_{k \to \infty} M^k x = 0 \right\} =: \mathcal{U}$

$x \in \mathcal{U} \Rightarrow Mx \in \mathcal{U}$

Se M diagonalizzabile, $Mv_i = \lambda_i v_i$

$$U = \text{span}\{v_i : |\lambda_i| < 1\}$$

$$M^k x = M^k(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m) = \alpha_1 \lambda_1^k v_1 + \dots + \alpha_m \lambda_m^k v_m$$

tende a zero sse $\alpha_i = 0$ quando $|\lambda_i| \geq 1$

Per M generale,

$U = \text{span}($ $v_{i,j}$: $v_{i,j}$ appartiene a catena di Jordan con autovalore λ_i t.c. $|\lambda_i| < 1)$

Perturbaz. di sottospazi invarianti:

Setup: a meno di cambi di base,

$$M = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} A & C \\ 0 & B \end{array}\right] \begin{array}{l} \}n \\ \}m-n \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{n} & \underbrace{\quad}_{m-n} \end{array} \end{array}, \quad \mathcal{U} = \left[\begin{array}{c} I \\ 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \}n \\ \}m-n \end{array}$$ sottosp. invariante

$$\tilde{M} = M + \delta M = \begin{bmatrix} A+\delta A & C+\delta C \\ 0+\delta D & B+\delta B \end{bmatrix}$$

$$\|\delta A\| = a \qquad \|\delta B\| = b \qquad \|\delta C\| = c \qquad \|\delta D\| = d$$

Vogliamo dimostrare che se a, b, c, d "sufficientemente piccoli" rispetto a $\mathrm{sep}(A, B)$, allora esiste X "piccola" t.c. $\mathrm{span}\left(\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}\right)$ è un sott. invariante di $M+\delta M$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -X & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A+\delta A & C+\delta C \\ \delta D & B+\delta B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ X & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A+\delta A & C+\delta C \\ \delta D - X(A+\delta A) & B+\delta B - X(C+\delta C) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ X & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A+\delta A - X(C+\delta C) & C+\delta C \\ \circledast & B+\delta B - X(C+\delta C) \end{bmatrix}$$

$$\circledast \quad \delta D - X(A+\delta A) + \big(B+\delta B - X(C+\delta C)\big) X$$

se trovo X t.c. $\circledast = 0$, allora

$$(M+\delta M)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ X & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ X & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ X \end{bmatrix} \text{ invariante}$$

$$0 = \delta D - X(A+\delta A) + (B+\delta B)X - X(C+\delta C)X$$

(equazioni di Riccati (algebriche))

Vorremmo dire che $(*)$ ha una sol. sufficientem. piccola

(notate che se $\delta D = 0$, allora $X=0$ è soluzione)

$$XA - BX = XCX + (\delta D - X\delta A + \delta B X + X\cdot\delta C\cdot X)$$

Vorrei mostrare che questa eq. di pto fisso ha un pto fisso suff. piccolo

$$\underbrace{X_{k+1}A - BX_{k+1}} = X_k C X_k + (\delta D - X_k\,\delta A + \delta B\cdot X_k + X_k\cdot\delta C\cdot X_k)$$

$$\mathrm{vec}(X_{k+1}) = T^{-1} \cdot \mathrm{vec}(X_k C X_k + \delta D + \dots)$$

dove $T = I \otimes B - A^T \otimes I$

vorremmo dire che la mappa φ:

$$\mathrm{vec}(X_k) \longmapsto T^{-1} \cdot \mathrm{vec}(X_k C X_k + \delta D + \dots)$$

ha un pto fisso (vicino a 0)

facciamo vedere che $\varphi(B(0,r)) \subseteq B(0,r)$

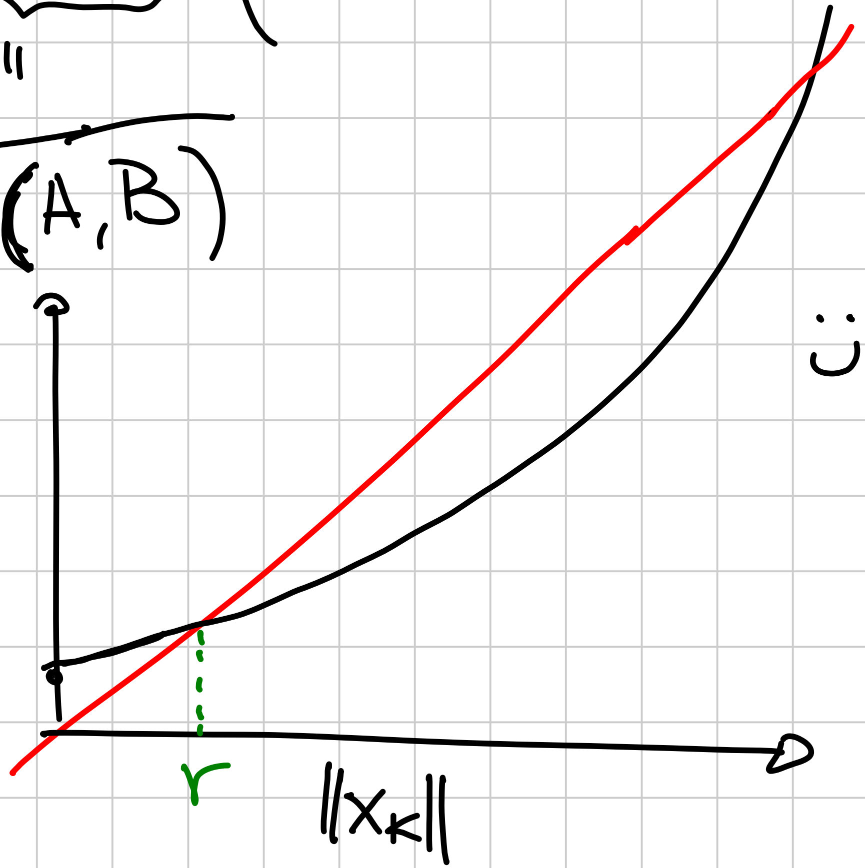
per un certo $r > 0$ (teo. di Brouwer pto fisso)

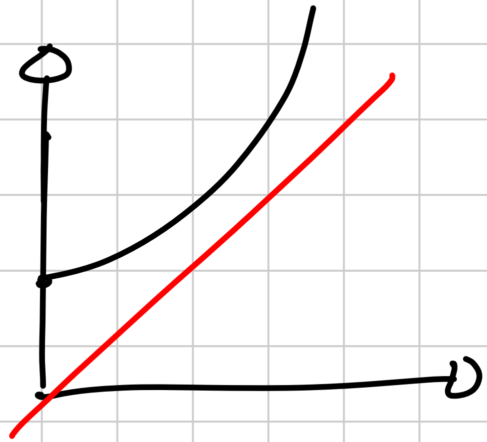
Consideriamo norme di Frobenius $\|X_k\|_F$

quindi $\|\mathrm{vec}(X_k)\|_2$

$$\|\varphi(x_k)\| \leq \underbrace{\|T^{-1}\|}_{= \frac{1}{sep(A,B)}} \cdot \left(\|x_k\| \cdot \|C\| \cdot \|x_k\| + \|x_k\| \cdot a + b \cdot \|x_k\| + d + c \cdot \|x_k\|^2 \right)$$

stime per $\|\varphi(x_k)\|$



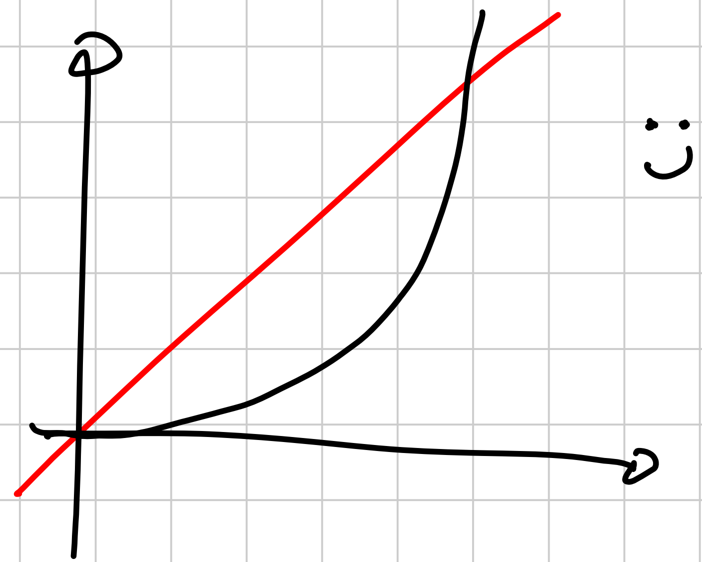


se trovo un pto fisso rellone questo dimostro che

$$\|x_k\| \leq r \Rightarrow \|\varphi(x_k)\| \leq r$$

Sono nel caso :) o nel caso :(?

Se $a, b, c, d = 0$, allora



:)

In generale ci sarà un discriminante che mi dice se parabola $- x$ incontra lo zero o no

Per a, b, c, d suff. piccoli sarà verificato

$$X_{k+1}A - BX_{k+1} = X_k C X_k + \left(\delta D - X_{k+1}\delta A + \delta B X_{k+1} + X_k \cdot \delta C \cdot X_k\right)$$

$$\cancel{X_{k+1}A - BX_{k+1} = X_k C X_k + \left(\delta D - X_k \delta A + \delta B \cdot X_k + X_k \cdot \delta C \cdot X_k\right)}$$

$$X_{k+1}(A+\delta A) - (B+\delta B)X_{k+1} = X_k(C+\delta C)X_k + \delta D$$

$$T = (A+\delta A)^T \otimes I + I \otimes (B+\delta B)$$

$$\|T^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\mathrm{sep}(A,B) - a - b}$$ leggermente più complicato

__Matrix pencil__ : espressione $A + xB$, $A, B \in \mathbb{C}^{m \times n}$

__regolare__ se $m = n$, e $\det(A + xB)$ non è id. nullo

__autovalore__ : valore $\lambda \in \mathbb{C}$ t.c. $A + \lambda B$ è singolare

(generalizza λ autovalore di $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ se $A - \lambda I$ è singolare)

__autovettore__ : $v \in \mathbb{C}^m$ t.c. $(A + \lambda B)v = 0$

$\det(A + xB)$ genericamente ha grado m

se $A, B \in \mathbb{C}^{m \times m}$ $\Rightarrow$ m autovalori contati con molteplicità

Potrebbe però avere grado più basso, es.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B} x$$

$$\det(A + xB) = \det\begin{pmatrix} 1+x & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 + x \quad \text{con grado}$$

1 anziché 2

$\lambda = -1$ è autovalore (difatti $A + (-1)B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ singolare)

Si dice che l'autovalore "mancante" è $\lambda = \infty$

<u>Def</u>: se $\det(A + \lambda B)$ ha grado $n' < n$, si dice che la pencil ha $n - n'$ autovalori a ∞

(Versione proiettiva: $Ax_0 + Bx_1$

$\det(Ax_0 + Bx_1)$ = pol. omogeneo di grado m in x_0, x_1

che si scrive (su $\mathbb{C}$) come prodotto di m fattori lineari $(ax_0 + bx_1)$ autovalori $= \frac{x_1}{x_0} = -\frac{a}{b}$

e se $b=0$ il rapporto vale ∞)

(Il coeff. di x^m in $\det(A + xB)$ è $\det B$,

quindi ci sono autoval. a $\infty \iff B$ è singolare

Pencil singolari: rettangolari, oppure $\det(A + xB) \equiv 0$, ad es.

1. $\begin{bmatrix} 1+x & 1+x \\ 1+x & 1+x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x$ oppure

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1+x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

È possibile definire autovalori di pencil singolari:

λ autovalore di $A+Bx \iff rk(A+B\lambda)$ minore del "rango generico" di $A+Bx$

<u>ES</u>: in 2, 1, $\lambda=-1$ autovalore, perché $rk(A+B\lambda) <$ rango generico

Un modo di definire "rango generico" è come

$\mathrm{rk}_{\mathbb{C}(x)}\ A+Bx$

QZ factorization!

$A = Q T_A Z$
$B = Q T_B Z$

Q, Z ortog.