$A + xB \qquad A, B \in \mathbb{C}^{m \times n}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} + x b_{11} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \cdots & & a_{mn} + b_{mn} x \end{bmatrix}$$

regolare $\iff m = n$ e $\det(A + xB) \neq 0$

λ zero di $\det(A + xB) \iff A + \lambda B$ non invertibile

$\iff \lambda$ autovalore di $A + xB$

v autovettore $\iff (A + \lambda B) v = 0$

QZ factorization (generalized Schur)

$\forall A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\exists Q, Z$ ortogonali t.c. $A = Q T_A Z$, $B = Q T_B Z$

T_A, T_B triangolari

$$A + xB = Q\,(\underbrace{T_A + xT_B}_{=\begin{bmatrix} t_{11}+s_{11}x & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & t_{nn}+s_{nn}x \end{bmatrix}})\,Z$$

$T_A + \lambda T_B$ singolare $\iff$ $t_{ii} + s_{ii}\lambda = 0$ per qualche $i \iff \lambda = -\dfrac{t_{ii}}{s_{ii}}$

$s_{ii} = 0, t_{ii} \neq 0 \Rightarrow$ autovalore a ∞

$s_{ii} = 0, t_{ii} = 0 \Rightarrow$ pencil singolare

Schur form stabile all'indietro $\tilde{\lambda}_i$ calcolati sono autoval. esatti di una $(A+\Delta A,\ B+\Delta B)$

<u>Forma canonica</u> (equivalente della forma di Jordan)

$A_1 + xB_1 \sim A + xB$ se $A_1 + xB_1 \sim P(A + xB)Q$

con P, Q quadrate e invertibili

<u>Teo</u>: (forma canonica di Weierstrass)

$A + xB$ pencil <u>regolare</u> $\Rightarrow \exists\, P, Q$ t.c. $P(A+xB)Q$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & & 0 \\ & \boxed{J_2} & & & \\ & & \boxed{J_3} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \boxed{J_k} \end{pmatrix} = \mathrm{blkdiag}(J_1, J_2, \dots J_k)$$ con J_k in una di

queste forme:

- $J_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix} - x \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad \det(J_\lambda - xI) = (x - \lambda)^{n_i}$

- $J_\infty = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} - x \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad \det(I - xJ_0) = 1$

Se B invertibile, cambia poco:

$$A+xB \sim -B^{-1}(A+xB) = \underbrace{-B^{-1}A} - xI \sim \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & 0 \\ & \boxed{J_2} & \\ 0 & & \ddots \; \boxed{J_k} \end{pmatrix} - xI$$

Idea dim: che tipo di trasform. faccio su x?

$$x = \frac{a+by}{c+dy} \qquad A+xB = A + \frac{a+by}{c+dy} B = \frac{1}{c+dy}\Big((c+dy)A + (a+by)B\Big)$$

$$= \frac{1}{c+dy}\Big(\underbrace{cA+aB}_{\hat{A}} + y\underbrace{(dA+bB)}_{\hat{B}}\Big) = \frac{1}{c+dy}\left(\hat{A} + y\hat{B}\right)$$

se λ t.c. $\det(A+\lambda B)=0$ (e $c+d\lambda \neq 0$), μ t.c. $\mu = \dfrac{a+b\lambda}{c+d\lambda}$

è tale che $\det(\hat{A} + \hat{\mu}\hat{B}) = 0$

(molteplicità preservate, autoval. a ∞ si trasformano secondo le stesse regole)

Nella dimostrazione, facciamo una trasform. di questo tipo che "le sposti" autovalori a ∞

<u>dim</u>: poiché $\det(A + xB) \neq 0$, esisterà c t.c. $\det(A + cB) \neq 0$

$$A + xB = A + cB + (x-c)B \sim I + (x-c)(A+cB)^{-1}B$$

(prendo forma di Jordan $(A+cB)^{-1}B = V \cdot J V^{-1}$)

$$\sim I + (x-c) \cdot J = \begin{bmatrix} \square & & & \\ & \square & & \\ & & \square & \\ & & & \ddots \\ & & & & \square \end{bmatrix}$$

I blocchi hanno forme

$$I+(x-c)J_\mu =$$

$$= \begin{bmatrix} 1+(x-c)\mu & x-c & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & x-c \\ & & & 1+(x-c)\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-c\mu & -c & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -c \\ & & & 1-c\mu \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} \mu & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \mu \end{bmatrix} \quad (*)$$

se $\mu \neq 0$

$$\sim \begin{bmatrix} \mu & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & 0 & \ddots & 1 \\ & & & \mu \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1-c\mu & -c & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & 0 & \ddots & -c \\ & & & 1-c\mu \end{bmatrix} - xI$$

$$= \begin{bmatrix} 1/\mu & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1/\mu \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1-c\mu}{\mu} & c/\mu & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & c/\mu \\ 0 & & & -\frac{1-c\mu}{\mu} \end{bmatrix} - xI$$

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1/\mu & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1/\mu \\ & & & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \left(I + \frac{1}{\mu} J_0\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\mu^k} J_0^k = \begin{bmatrix} 1 & -1/\mu & 1/\mu^2 & -1/\mu^3 & \cdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & -1/\mu \\ & & & & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\mu^k} J_0^k\right)\left(-\frac{1-c\mu}{\mu} I + \frac{c}{\mu} J_0\right) - xI$$

$$= -\frac{1-c\mu}{\mu} + \left(+\frac{1-\cancel{c\mu}}{\mu^2} + \cancel{\frac{c}{\mu}}\right) J_0 + (*) J_0^2 + \ldots (*) J_0^{n_i-1} - xI$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1-c\mu}{\mu} & \frac{1}{\mu^2} & * & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & * \\ & & & \ddots & \frac{1}{\mu^2} \\ 0 & & & & -\frac{1-c\mu}{\mu} \end{bmatrix} - xI \sim \underbrace{J_{-\frac{1-c\mu}{\mu}} - xI}$$

è un singolo blocco di Jordan perché

$$\begin{bmatrix} -\frac{1-c\mu}{\mu} & \frac{1}{\mu^2} & * & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & & * \\ & & \ddots & \ddots & * \\ & & & \ddots & \frac{1}{\mu^2} \\ 0 & & & & -\frac{1-c\mu}{\mu} \end{bmatrix} - \left(-\frac{1-c\mu}{\mu}\right) I = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\mu^2} & * & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \frac{1}{\mu^2} \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

non singolare

ha rango $n_i - 1$

Se $\mu = 0$, riparto da $*$

$$\begin{bmatrix} 1+(x-c)\mu & x-c & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & x-c \\ & & & 1+(x-c)\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-c\mu & -c & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -c \\ & & & 1-c\mu \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} \mu & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \mu \end{bmatrix}$$

$I - J_0 x$

$$\sim I + \begin{bmatrix} 1 & -c & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -c \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} x$$

$$= I + (I - cJ_0)^{-1} J_0 x = I + J_0 \sum_{k=0}^{\infty} c^k J_0^k \, x =$$

$$I + \begin{bmatrix} 0 & 1 & c & c^2 & \cdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & c^2 \\ & & \ddots & \ddots & c \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} x \sim I - \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} x$$

$\square$

autovalori 0, rango $n_i - 1 \Rightarrow$ un solo blocco di Jordan

$$PAQ = \begin{bmatrix} \begin{matrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{matrix} & 0 \\ 0 & \ddots \end{bmatrix} \qquad PBQ = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & 0 \\ 0 & \ddots \end{bmatrix}$$

$$AQ = P^{-1} \begin{bmatrix} \begin{matrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{matrix} & 0 \\ 0 & \ddots \end{bmatrix} \qquad BQ = P^{-1} \begin{bmatrix} \begin{matrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{matrix} & 0 \\ 0 & \ddots \end{bmatrix}$$

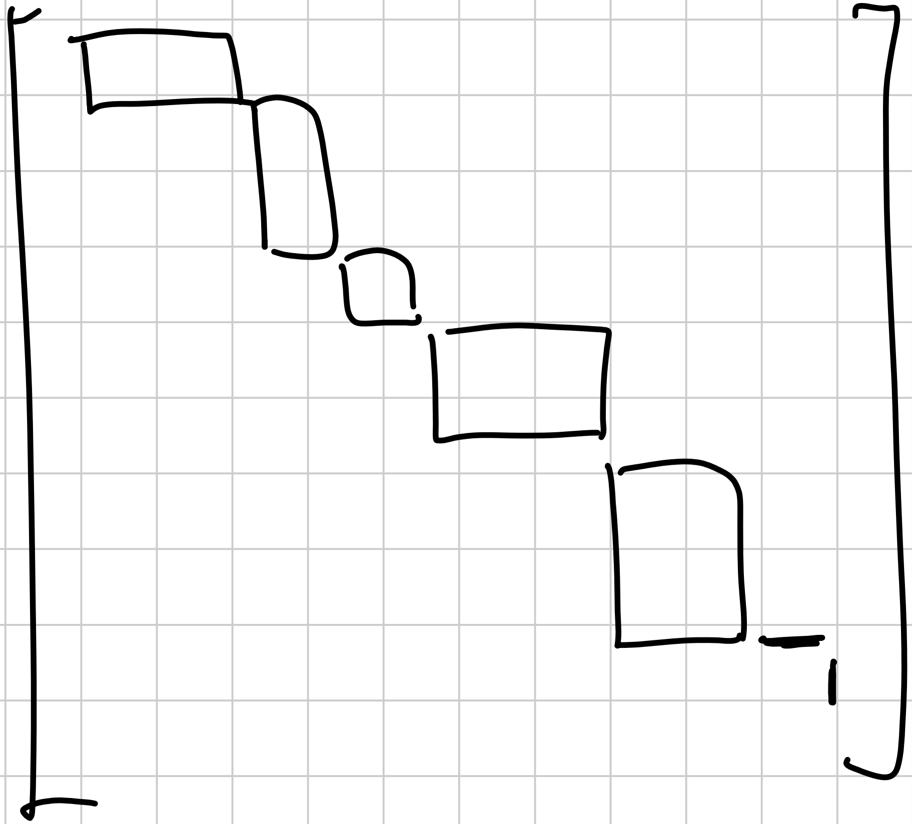
q_j = colonne di Q $\quad$ p_j colonne di P^{-1}

$Aq_1 = p_1 \lambda \quad Bq_1 = -p_1 \rightsquigarrow Aq_1 + \lambda B q_1 = 0$

$Aq_2 = p_1 + \lambda p_2, \; Bq_2 = -p_2 \rightsquigarrow Aq_2 + Bq_1 + \lambda B q_2 = 0$

$\vdots$

(catene di Jordan)



$\{0\}$ $\quad T:\mathbb{R}^n \to \{0\}$

$0 \times n$ $\quad$ —

$T: 0 \to \mathbb{R}^m$

$|$

$$M(\lambda) \begin{bmatrix} 0 & 1 & \lambda \\ 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ha determinante 0 per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$,

<u>però</u> non esiste $v \neq 0$ t.c. $M(\lambda)v = 0 \ \forall \lambda$

né $w \neq 0$ t.c. $w^T M(\lambda) = 0$

(Remark: kernel comune a tutte le $M(\lambda) \iff$ blocco 0×1

$$\begin{bmatrix} \square & & & 0 \\ & \square & & \vdots \\ & & \square & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix} e_n = 0$$
)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A + Bx$ è una matrice in $\mathbb{K} = \mathbb{C}(x)$

es. $\begin{bmatrix} 1 & x \\ 1 & x \end{bmatrix}$ è una matrice in $\mathbb{C}(x)$ di rango 1

ha kernel $\begin{bmatrix} -x \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}(x)^2$

I blocchi di Kronecker $K \times (K+1)$ sono associati alla presenza di un kernel in $\mathbb{C}(x)$

$$\begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^4 \\ -x^3 \\ x^2 \\ -x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Il kernel di $L(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & x \end{bmatrix} \in \mathbb{C}[x]^{K \times (K+1)}$

è $\begin{bmatrix} (-1)^K x^K \\ \vdots \\ x^2 \\ -x \\ 1 \end{bmatrix}$

Gli altri blocchi di Kronecker hanno rango pieno in $\mathbb{C}(x)$

Il kernel di $\begin{bmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_K \end{bmatrix}$ è $\begin{bmatrix} S_1 & & & \\ & S_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & S_K \end{bmatrix}$,

dove S_i spanna $\ker(M_i)$

$\Rightarrow$ se so la forma di Kronecker di $A + xB$, so anche $\ker(A + xB)$