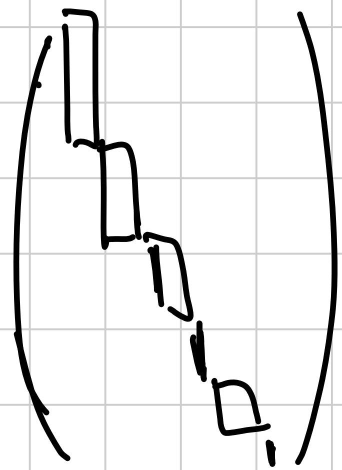
Kernel dei singoli blocchi di Kronecker:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & x \end{bmatrix}}_{k \times k+1} \quad \text{ha Kernel} \quad \mathrm{span}\begin{bmatrix} (-x)^k \\ \vdots \\ -x^3 \\ x^2 \\ -x \\ 1 \end{bmatrix}$$

tutti gli altri: span $[\ ]$

$$\text{Kernel di } \underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{K_1} & & & \\ & \boxed{K_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{K_\ell} \end{bmatrix}} = \mathrm{span}$$



$$\operatorname{Ker}(A + xB) = \operatorname{Ker} P^{-1} \begin{bmatrix} \boxed{K_1} & & & \\ & \boxed{K_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{K_e} \end{bmatrix} Q^{-1} = Q \begin{bmatrix} \square & & & & & \\ & \square & & & & \\ & & \square & & & \\ & & & \mid & & \\ & & & & \square & \\ & & & & & \mid \end{bmatrix}$$

Forma di Kronecker caratterizza completamente il kernel di una pencil.

$$= \operatorname{span} Q \cdot \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} (-x)^{k_1} \\ \vdots \\ x^2 \\ -x \\ 1 \end{bmatrix} & & & \\ & \begin{bmatrix} (-x)^{k_2} \\ \vdots \\ -x \\ 1 \end{bmatrix} & & \\ & & \begin{bmatrix} (-x)^{k_e} \\ \vdots \\ -x \\ 1 \end{bmatrix} & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{Ker}(A + Bx) \subseteq \mathbb{C}(x)^n$$

$\circledast$ Ogni sottospazio di $\mathbb{C}(x)$ ha una base in $\mathbb{C}[x]$

Data una matrice in $\mathbb{C}[x]^{n\times k}$, definiamo <u>grado totale</u> la somma dei gradi delle sue colonne

Tra tutte le possibili basi di $\mathrm{Ker}(A+Bx)$, la ⊛ è quella con grado totale minimo. ("minimal basis")
(anzi, la tupla dei gradi delle colonne è minima)

Questi gradi minimi sono le dimensioni dei blocchi di Kronecker di tipo $k_i \times (k_i+1)$ nella Kronecker can. form della pencil.

numero blocchi $k_i \times (k_i+1)$ $= \dim \mathrm{Ker}_{\mathbb{C}(x)} A+Bx$

dimensioni dei blocchi $k_i \times (k_i+1)$ $=$ gradi minimi di una base polinomiale di $\mathrm{Ker}_{\mathbb{C}(x)} A+Bx$

Stessa cosa per il Kernel sinistro, cioè

$$\left\{ v(x) \in \mathbb{C}(x)^{1\times n} \text{ t.c. } v(x)(A+Bx)=0 \right\}$$

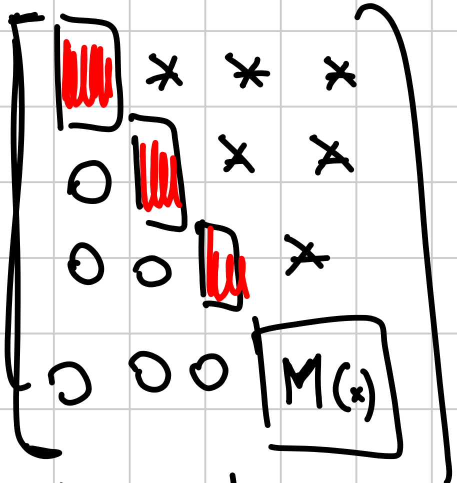
blocchi con Ker sinistro: solo quelli del tipo $(k+1)\times k$ che hanno kernel $\left[(-x)^k \; (-x)^{k-1} \cdots \; -x \;\; 1\right]$

Gradi minimi del kernel sinistro di $A+Bx$ = dimensioni dei blocchi di Kronecker $(k_i+1)\times k_i$.

Dimostrazione KCF:

Induzione: data una pencil $A+Bx$ con kernel non banale la scriveremo come

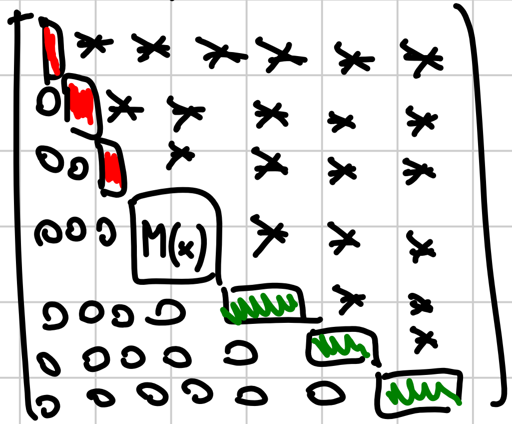
(1) $A+Bx \sim \left[\begin{array}{c|c} K\times(K+1) & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right]$

(2) $A+Bx \sim$ 

rosso: blocchi $K\times(K+1)$

mi fermo quando $M(x)$ è vuoto, o non ha più kernel dx

Ragionando nello stesso modo sulla trasposta, identifico blocchi che corrispondono al kernel <u>sinistro</u>

(3) $A+Bx \sim$ 

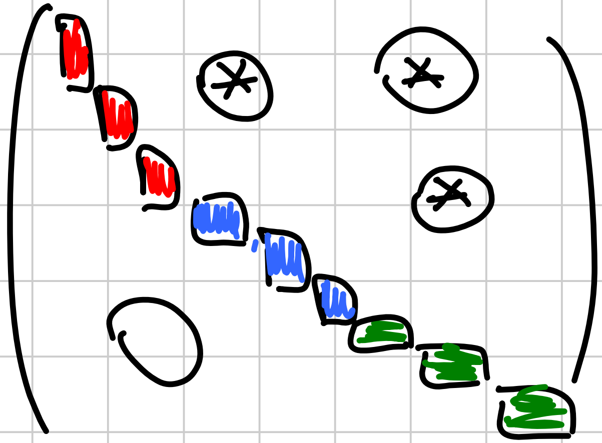
verde: blocchi $(K+1)\times K$

Mi fermo quando $M(x)$ non ha più kernel né destro

(4) né sinistro (in $\mathbb{C}(x)$), cioè è quadrata e $\det(M(x)) \neq 0$

$\Rightarrow M(x)$ ha una Weierstrass can. form

$\Rightarrow A + Bx \sim$



$k \times (k+1)$

blocchi regolari J_{λ}, J_{∞}

$(k+1) \times k$

(5) Infine, faccio sparire pezzi sopra la diagonale.

Più nel dettaglio:

(1): identifichiamo un blocco $k \times (k+1)$ in one pencil con kernel destro.

Esiste $v(x)$ t.c. $(A + Bx)\, v(x) = 0$

$$v(x) \in \mathbb{C}(x)^n$$

Eliminando denominatori, possiamo supporre $v(x) \in \mathbb{C}[x]^n$

supponiamo $v(x) = v_0 + v_1 x + \dots + v_d x^d$ di grado d minimo, $v_i \in \mathbb{C}^n$

$$(A+Bx)\,v(x) = 0 \iff \begin{cases} Av_0 = 0 \\ Av_1 + Bv_0 = 0 \\ Av_2 + Bv_1 = 0 \\ \vdots \\ Av_d + Bv_{d-1} = 0 \\ Bv_d = 0 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} A & & & 0 \\ B & A & & \\ & B & A & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & A \\ & & & B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{bmatrix} = 0$$

Prendo basi di $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^m$ della forma $[v_0, v_1, v_2, \dots v_d, *] =: V$

e $[Av_1, Av_2, \dots Av_d, *] =: W$

$$\begin{cases} W^{-1}AVe_1 = W^{-1}Av_0 = 0 \\ W^{-1}BVe_1 = W^{-1}Bv_0 = W^{-1}(-Av_1) = -e_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} W^{-1}AVe_2 = W^{-1}Av_1 = e_1 \\ W^{-1}BVe_2 = W^{-1}Bv_1 = W^{-1}(-Av_2) = -e_2 \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$W^{-1}(A+Bx)V = \left[\begin{array}{ccccc|c} -x & 1 & & & & * \\ & -x & 1 & & & \\ & & -x & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & -x \; 1 & \\ \hline & & 0 & & & M(x) \end{array}\right]$$

$$\left[W^{-1}BVe_{d+1} = W^{-1}Bv_d = 0 \right.$$

Dimostriamo che i v_i sono lin. indipendenti: se non lo fossero, trovo un polinomio $\alpha(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_e x^e \in \mathbb{C}[x]$ di grado $e < d$ tale che

$p(x) = \alpha(x)\, v(x)$ ha il termine di grado è nullo:

difatti, il termine di grado e di $\alpha(x)v(x)$ è $\alpha_0 v_e + \alpha_1 v_{e-1} + \dots + \alpha_e v_0$

$$p(x) = p_0 + p_1 x + \dots + p_{e-1}x^{e-1} + 0 \cdot x^e + \dots \dots + p_{d+e}x^{d+e} \in \mathbb{C}[x]^n$$

$q(x) = p_0 + p_1 x + \dots + p_{e-1}x^{e-1}$ ha grado $\leq e-1 < d$ e, in più vale $(A+Bx)q(x) = 0$

Sappiamo che

$$(A+Bx)p(x) = (A+Bx)\alpha(x)v(x) = \alpha(x)(A+Bx)v(x) = 0$$

$$\begin{cases} Ap_0 = 0 \\ Ap_1 + Bp_0 = 0 \\ \vdots \\ Ap_{e-1} + Bp_{e-2} = 0 \\ \cancel{Ap_e} + Bp_{e-1} = 0 \\ \vdots \end{cases} \iff (A+Bx)q(x) = 0$$

impossibile perché $q(x)$ ha grado $< d$ e ho preso d minimale

Analogamente, se Av_i non sono lin. indipendenti, allora trovo $\alpha(x)$ tale che $\alpha(x)v(x) = p(x)$ ha $Ap_e = 0$ e ottengo $q(x)$ tale che $(A+Bx)q(x) = 0$

(2), (3), (4) non richiedono più dettagli

(5) faccio sparire la parte sopra la diagonale:
$K(x), M(x)$ blocchi elementari della KCF

$$\begin{bmatrix} K(x) & L(x) \\ 0 & M(x) \end{bmatrix} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \boxed{E} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K(x) & L(x) \\ 0 & M(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \boxed{F} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} K(x) & \boxed{0} \\ 0 & M(x) \end{bmatrix}$$

Mostriamo che scegliendo bene E, F otteniamo uno zero nel blocco $(1,2)$

$$\begin{bmatrix} 1 & E \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K(x) & L(x) \\ 0 & M(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & F \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K(x) & L(x)+EM(x) \\ 0 & M(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & F \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} K(x) & \boxed{K(x)F + L(x) + EM(x)} \\ 0 & M(x) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} K_0 F + E M_0 = -L_0 \\ K_1 F + E M_1 = -L_1 \end{cases} \quad (*)$$

se E, F soddisfano il sistema $(*)$, allora il blocco $1,2$ si annulla

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} M_0^T \otimes I & I \otimes K_0 \\ \hline M_1^T \otimes I & I \otimes K_1 \end{array}\right]} \begin{bmatrix} \operatorname{vec} E \\ \operatorname{vec} F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\operatorname{vec} L_0 \\ -\operatorname{vec} L_1 \end{bmatrix}$$

dobbiamo verificare che, comunque scelga $K_0 + K_1 x$ e $M_0 + M_1 x$ blocchi elem. di Kronecker, questa matrice abbia rango per colonne pieno

$\boxed{\text{Gantmacher '59}}$

Sistemi di equazioni differenziali lineari:

$x : [0,T] \to \mathbb{C}^n$

(1) $\underset{\sim}{B} \frac{d}{dt} x(t) = \underset{\sim}{A} x(t) + f(t)$ $\quad x(0) = x_0$

m equazioni, quindi $A, B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ $\quad f : [0,T] \to \mathbb{C}^m$

Se B quadrata invertibile, nulla di nuovo: $\frac{d}{dt} x(t) = B^{-1} A x(t) + B^{-1} f(t)$

Trasformazioni che possiamo fare: data $P \in \mathbb{C}^{m \times m}$ invertibile,

(1) equivalente a $PB \frac{d}{dt} x(t) = PA x(t) + Pf(t)$

Data $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertibile, posso porre $y(t) := Q^{-1} x(t)$

così (1) equivalente a $\underbrace{PBQ} \frac{d}{dt} y(t) = \underbrace{PAQ}\, y(t) + Pf(t)$

Se scelgo P, Q dalla KCF, PBQ, PAQ diagonali a blocchi

$$\begin{bmatrix} K_{1,1} & & & \\ & K_{2,1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & K_{\ell,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} y_1(t) \\ \frac{d}{dt} y_2(t) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt} y_\ell(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1,0} & & & \\ & K_{2,0} & & \\ & & \ddots & \\ & & & K_{\ell,0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_\ell(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_\ell(t) \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underset{\sim}{K_{i,1}} \frac{d}{dt} y_i(t) = \underset{\sim}{K_{i,0}}\, y_i(t) + f_i(t), \qquad i = 1, 2, \dots \ell$$

ℓ sistemi di eq. differenziali più piccoli di tipo fissato:

- J_λ: $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$, $B = I$ (setto $y_i := z$, $f_i := g$)

$$I \cdot \begin{bmatrix} \dot z_1 \\ \dot z_2 \\ \vdots \\ \dot z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_k(t) \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\dot z_{k-1} = \lambda z_{k-1} + z_k + g_{k-1}(t)$$

$$\dot z_k = \lambda z_k + g_k(t)$$

- J_∞: $A = I$ $\quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$ caso 1×1: $A = [1]$ $\quad B = [0]$

caso 1×1:

$0 \cdot \dot z_1(t) = 1 \cdot z_1(t) + g_1(t)$ $\rightsquigarrow$ equazione algebrica, $z_1(t) = g_1(t)$

$z_1(0) = z_0$ $\quad$ Risolubile solo se $g_1(0) = z_0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot z_1 \\ \vdots \\ \dot z_k \end{bmatrix}(t) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_k(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_k(t) \end{bmatrix}$$

$z_1(t)$

$\vdots$

$\rightsquigarrow$ $\dot z_{k-1}(t) = z_{k-2}(t) + g_{k-2}(t)$

$\dot z_k(t) = z_{k-1}(t) + g_{k-1}(t)$ $\rightsquigarrow$ risolubile per z_{k-1} solo se $g_k \in C^1([0,T])$

$0 \cdot \dot z_k(t) = z_k(t) + g_k(t)$ $\quad\rightsquigarrow\quad$ $z_k(t) = -g_k(t)$

tutto il sistema è risolubile solo se $g \in C^{k-1}([0,T])$

(DAE, equazioni differenziali - algebriche)