<u>Teo</u>: se abbiamo un sistema di equazioni differenziali lineari della forma

$$\begin{cases} B \frac{d}{dt} x(t) = A x(t) + f(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$f \in C^0([0,T], \mathbb{C}^m)$

$A, B \in \mathbb{C}^{m \times n}$

allora esso è equivalente a uno della forma

$$\begin{cases} K_1^{(i)} \frac{d}{dt} y_i(t) = K_0^{(i)} y_i(t) + f_i(t) \\ y_i(0) = y_0 \end{cases}$$

con $K_0 + K_1 x$ blocco della Kronecker can. form blocchi: $J_\lambda(x)$, $J_\infty(x)$ $\rightsquigarrow$ le volte scorse

$\hookrightarrow$ condizioni su $f(0), \dot{f}(0), \ldots$

$$P(A,B)Q = \operatorname{diag}\left(\text{blocchi della forma } J_\lambda(x),\ J_\infty(x),\ L(x),\ L^T(x)\right)$$

$$L(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & & 0 \\ & 1 & x & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & 1 & x \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{k \times (k+1)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ y_{k+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_k(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \vdots \\ \dot{y}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_k(t) \end{bmatrix}$$

y_1 funzione continua qualunque

$$y_2(t) = (y_2)_0 + \int_0^t \left(y_1(\tau) + f_1(\tau) \right) d\tau$$

$$y_{i+1}(t) = (y_{i+1})_0 + \int_0^t \left(y_i(\tau) + f_i(\tau) \right) d\tau$$

caso 0×1:

$$\square \frac{d}{dt} y_1(t) + \square\, y_1(t) + \square$$

0×1

$$\begin{bmatrix} \ddots & & \\ 0 \cdots 0 & \square & 0\,0 \cdots 0 \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$

funzione y_1 senza condizioni

$$\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ x & \ddots & \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & x \end{bmatrix} = L^T(x) \in \mathbb{C}^{(k+1) \times k}$$

$$
\begin{aligned}
0 &= y_1 + f_1(t) &&\rightsquigarrow && y_1(t) = -f_1(t) \quad \forall t \\
\dot{y}_1 &= y_2 + f_2(t) &&\rightsquigarrow && y_2(t) = \dot{y}_1(t) - f_2(t) \\
\dot{y}_2 &= \quad \vdots && && \vdots \\
\vdots \quad & \quad\; y_k \quad\;\; \vdots &&\rightsquigarrow && y_k(t) \\
\dot{y}_k &= 0 \quad f_{k+1}(t) &&\longrightarrow && \underbrace{\dot{y}_k(t)}_{\text{noto}} = f_{k+1}(t)
\end{aligned}
$$

<u>Es</u>: 2×1:

$$
\begin{aligned}
0 &= y_1 + f_1(t) &&\rightsquigarrow && y_1 = -f_1(t) \\
\dot{y}_1 &= 0 + f_2(t) && && -\dot{f}_1(t) = f_2(t)
\end{aligned}
$$

blocchi ker sinistro $\Leftrightarrow$ condizioni su f

(Equazioni differenziali - algebriche)

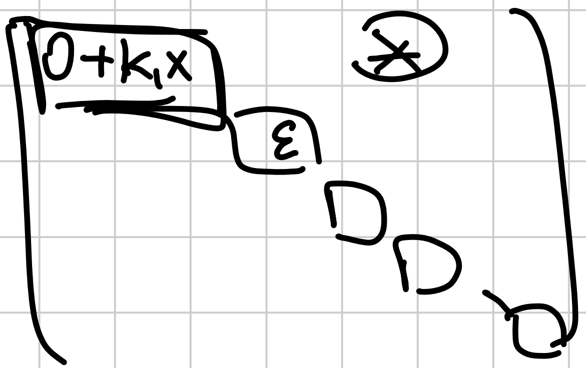
$A + hB$

(teoria analoga per difference equations,

$$\begin{cases} Bx_{k+1} = Ax_k + f_k & k \in \mathbb{N} \\ x_0 \text{ noto} \end{cases}$$

, es. Fibonacci)

Staircase form Van Dooren



$$\begin{bmatrix} 1 & 10^{-8} & 0 \\ 0 & 10^{-12} & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\langle \begin{array}{ll} \varepsilon \neq 0 & \text{regolare} \\ \varepsilon = 0 & \text{singolare} \end{array} \right.$$

si possono dire cose tipo "questa pencil sta a 10^{-12} da una pencil con forma canonica $L_{1\times 2}(x) \oplus L_{2\times 1}(x)$, e 10^{-8} da una delle forme $J_\infty^{(1)}(x) \oplus L_{0\times 1}(x) \oplus L_{2\times 1}(x)$ ("stratifications")

$\det A(x)$ è un polinomio di grado $\leq d \cdot m$

se $\deg\det(A(x)) = dm - K$, si dice che ci sono K autovalori a ∞.

---

def: dato $A(x) = A_0 + A_1 x + \dots + A_d x^d$

il <u>reversal</u> di $A(x)$ è

$$A_d + A_{d-1}x + A_{d-2}x^2 + \dots + A_0 x^d = A\left(\frac{1}{x}\right)\cdot x^d =: \operatorname{rev} A(x)$$

$(*)$

se $A(\lambda) = 0$ per qualche $\lambda \neq 0$, allora

$(\operatorname{rev} A)\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 0$ e viceversa

$\Rightarrow$ gli autovalori di $\operatorname{rev} A$ sono gli inversi degli autoval. di A.

Si estende a $0, \infty$ se consideriamo $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$

$$\det (\operatorname{rev} A)(x) = \det\left(A\left(\frac{1}{x}\right)\right)\cdot x^d$$

$$x = \frac{x_1}{x_0}$$

$$\det\left(A_0 x_0^d + A_1 x_0^{d-1} x_1 + A_2 x_0^{d-2} x_1^2 + \dots + A_d x_0^0 x_1^d\right)$$

è un pol. omogeneo di grado $d\cdot n$ in x_0, x_1, i.e.

$$\alpha_0 x_0^{d_m} + \alpha_1 x_0^{d_m-1} x_1 + \dots + \alpha_{d_m} x_0^0 x_1^{d_m} = \alpha(x_0, x_1)$$

$$\alpha(x, 1) = \det \operatorname{rev} A(x)$$

$$\alpha(1, x) = \det A(x)$$

(1) # autovalori ∞ di $A(x)$ = massima potenza x_0^k che posso raccogliere in $\alpha(x_0, x_1)$

(2) # autovalori 0 di $\operatorname{rev} A(x)$ = molteplicità di 0 come radice di $\alpha(x, 1)$ = massima potenza di x_0^k che posso raccogliere in $\alpha(x_0, x_1)$

Quindi (1), (2) sono uguali

$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{d-1} x^{d-1} + x^d$

<u>Companion matrix</u>

$$C = \begin{bmatrix} -a_{d-1} & -a_{d-2} & \cdots & -a_0 \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ha come autovalori gli zeri di $p(x)$

$$C(x) = C - xI$$

per $A(x) = -a_0 - a_1 x - \dots - x^d$

Troveremo $E(x), C(x) \in \mathbb{C}[x]^{dm \times dm}$ t.c.

con $\det E(x) = \pm 1$, $\det F(x) = \pm 1$ tali che

$$E(x)\, C(x)\, F(x) = \begin{bmatrix} A(x) & & & \\ & I & & \\ & & \ddots & \\ & & & I \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det E(x)\, \det C(x)\, \det F(x) = \det\big(A(x)\big)$$

$$= \pm 1$$

colonne (2) + colonne (2) + x · colonne (1)

$$\begin{bmatrix} A_d x + A_{d-1} & A_{d-2} & \cdots & A_1 & A_0 \\ I & -xI & & & \\ & I & -xI & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & I & -xI \end{bmatrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{c|c|cccc} A_d x + A_{d-1} & A_{d-2} + A_{d-1}x + A_d x^2 & A_{d-3} & \cdots & A_1 & A_0 \\ I & 0 & & & & \\ 0 & I & -xI & & & \\ \vdots & 0 & I & \ddots & & \\ & \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & & & I & -xI \end{array}\right]$$

(lo ottengo come $C(x)\begin{bmatrix} I & & & \\ xI & I & & \\ & & \ddots & \\ & & & I \end{bmatrix}$)

3ª colonna + x volte 2ª colonna

$$=\left[\begin{array}{cccc|ccc} A_{d-1}+A_dx & A_{d-2}+A_{d-1}x+A_dx^2 & A_{d-3}+A_{d-2}x+A_{d-1}x^2+A_dx^3 & & A_{d-4} & \cdots & A_0 \\ I & 0 & 0 & & & & \\ & I & 0 & & & & \\ & & I & & -xI & & \\ & & & & I & \ddots & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & I & -xI \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} B_d(x) & \cdots & B_3(x) & B_2(x) & A(x) \\ I & & & & 0 \\ & I & & & \vdots \\ & & \ddots & & 0 \\ & & & I & 0 \end{bmatrix}$$

1ª riga ← 1ª riga $-B_d(x)$ 2ª

⇕

molt. a sx per $\begin{bmatrix} I & -B_d(x) & & \\ & I & & \\ & & \ddots & \\ & & & I \end{bmatrix}$

$$\to \begin{bmatrix} 0 & B_{d-1}(x) & \cdots & B_2(x) & A(x) \\ I & & & & 0 \\ & I & & & \vdots \\ & & \ddots & & \\ & & & I & 0 \end{bmatrix} \to \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & A(x) \\ I & & & & \\ & I & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & I & 0 \end{bmatrix}}_{P}$$

riordiniamo colonne a blocchi:

$$\to \begin{bmatrix} A(x) & & & \\ & I & & \\ & & \ddots & \\ & & & I \end{bmatrix}$$

corrisponde a moltiplicare a dx per

$$\begin{bmatrix} 0 & I & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I \\ I & & & 0 \end{bmatrix}$$

con determinante ± 1 $\blacksquare$

Per calcolare autovalori di polinomi di matrici

(1) formo $C(x) = C_0 + C_1 x$

(2) $\mathrm{eig}(C_0, -C_1)$ (QZ)

stabile all'indietro, i.e., gli autoval. calcolati sono autoval. <u>esatti</u> di $C_0 + \Delta C_0$, $C_1 + \Delta C_1$ con

$$\frac{\|\Delta C_0\|}{\|C_0\|}, \frac{\|\Delta C_1\|}{\|C_1\|} = O(u)$$

<u>non</u> per forza gli autoval. di un polinomio di matrici con coefficienti $A_i + \Delta A_i$.

Esistono molti modi di costruire $C(x) \in \mathbb{C}[x]^{dm \times dm}$ pencil tale che $\exists$ $E(x), F(x) \in \mathbb{C}[x]^{dm \times dm}$ t.c.

$$E(x)\,C(x)\,F(x) = \mathrm{diag}\big(A(x), \underbrace{I_m, I_m, \dots}_{d-1 \text{ volte}} I_m\big)$$

e $\det E(x)$, $\det F(x)$ costanti non zero.

Si chiamano <u>linearizations</u>

Altro esempio: $d=3$

$$B(x) = \left[\begin{array}{cc|c} A_3x+A_2 & A_1 & I \\ O & A_0 & -xI \\ \hline I & -xI & O \end{array}\right]$$

(<u>non</u> si ottiene come $\neq E \cdot C(x) \cdot F$, stavolta)

(perché hanno KCF diverse per opportune scelte di $A(x)$)

$$E_1(x)\,C_1(x)\,F_1(x) = \begin{bmatrix} A(x) & & & \\ & I & & \\ & & \ddots & \\ & & & I \end{bmatrix} = E_2(x)\,C_2(x)\,F_2(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{E_2^{-1}(x)E_1(x)}\,C_1(x)\,\underbrace{F_1(x)F_2^{-1}(x)} = C_2(x)$$

tutte le linearizzazioni si ottengono l'una dall'altra moltiplicando a sx e dx per $E(x), F(x) \in \mathbb{C}[x]^{dm\times dm}$ con determinante costante

(Nota che $E_2^{-1}(x)$, $F_2^{-1}(x)$ sono ancora polinomi perché

$$E^{-1}(x) = \underbrace{\frac{1}{\det E(x)}}_{\text{costante}} \cdot \underbrace{\operatorname{adj} E(x)}_{\text{polinomio}}$$
)

ES: prendiamo $A(x) = 0$ di grado 3
$m=1$

$$B(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -x \\ 1 & -x & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{bmatrix},$$

un blocco 2×1 sing.
un blocco 1×2 sing.

$$C(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -x & 0 \\ 0 & 1 & -x \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x \end{bmatrix}$$

un blocco 1×0 sing.
un blocco 2×3 sing.

<u>non</u> sono equivalenti tramite $B(x) = E \cdot C(x) \cdot F$ con $E, F \in \mathbb{C}^{n\times n}$

Per es., perché hanno ker di grado diverso in $\mathbb{C}(x)$:

$\exists\, v$ costante t.c. $C(x)v = 0$ $\left(v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ $v \in \mathbb{C}^3$.

<u>non</u> esiste w costante t.c. $B(x)\,w = 0$. $\quad w \in \mathbb{C}^3$.