polinomio di matrici $A(x) = A_0 + A_1 x + \dots + A_d x^d \in \mathbb{C}[x]^{n \times n}$

<u>autovettori</u> sono vettori $v \in \mathbb{C}^n$ t.c. $v \neq 0$

$$A(\lambda) v = 0 \qquad \lambda \in \mathbb{C} \text{ autovalore}$$

<u>Teo</u>: v autovettore $\Longleftrightarrow$

$$w(\lambda, v) = \begin{bmatrix} \lambda^{d-1} v \\ \vdots \\ \lambda^2 v \\ \lambda v \\ v \end{bmatrix} \text{ autovettore di } C(x)$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} A_d\lambda + A_{d-1} & A_{d-2} & \cdots & A_2 & A_1 & A_0 \\ I & -\lambda I & & & & \\ & I & -\lambda I & & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & & I & -\lambda I & \\ & & & & I & -\lambda I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_{d-2} \\ w_{d-1} \\ w_d \end{bmatrix} = 0$$

$$w_{d-1} = \lambda w_d$$

$$w_{d-2} = \lambda w_{d-1} = \lambda^2 w_d$$

$$\vdots$$

$$0 = (A_d\lambda + A_{d-1}) w_1 + A_{d-2} w_2 + \cdots + A_{d-1} w_{d-1} + A_d w_d =$$

$$(A_{d-1}\lambda + A_{d-1})\lambda^{d-1} w_d + A_{d-2}\lambda^{d-2} w_d + \cdots + A_{d-1}\lambda w_d + A_d w_d = A(\lambda) w_d$$

md autovettori di $C(x)$ (se sono distinti)

md autovettori di $A(x)$

⚠ Gli autovettori di $A(x)$ non sono lin. indipendenti (sono md vettori lunghi m)

$$\begin{bmatrix} (x-1)(x-2) & 0 \\ 0 & (x-3)(x-4) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}[x]^{2\times 2}, \text{ grado } 2$$

autocoppie: $\lambda=1,\ v=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ $\quad \lambda=2,\ v=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ $\quad$ non lin. ind.

$\lambda=3\ v=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ $\quad \lambda=4\ v=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

Però sono lin. ind. $W(\lambda, v)$, cioè $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \hline 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \hline 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ \hline 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ \hline 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

---

coppia autoval / autovett (λ, v) di $A(x)$

$\Leftrightarrow$ sol. particolare $v(t) = v \cdot e^{\lambda t}$ dell'ODE lineare

$(*)$ $A_d X^{(d)}(t) + A_{d-1} X^{(d-1)}(t) + \dots + A_1 X'(t) + A_0 X(t) = 0$

$v'(t) = \lambda v e^{\lambda t}$, $v^{(2)}(t) = \lambda^2 v e^{\lambda t}$ ...

$A_d v^{(d)}(t) + \dots + A_0 v(t) = A_d \lambda^d v e^{\lambda t} + \dots + A_0 v e^{\lambda t} = (A(\lambda) v) e^{\lambda t}$

$= 0$ sse $A(\lambda) v = 0$.

Linearizzare il sistema di ode: aggiungere variabili e scriverlo come

$$x_d(t) = x(t)$$

$$\rightsquigarrow \quad \text{d-1 relazioni} \left[\begin{aligned} x_{d-1}(t) &= \frac{d}{dt} x_d(t) \\ x_{d-2}(t) &= \frac{d}{dt} x_{d-1}(t) \\ &\vdots \\ x_1(t) &= \frac{d}{dt} x_2(t) \end{aligned}\right.$$

$$\circledast \quad \begin{bmatrix} -A_d & 0 & \cdots & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_d(t) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} A_{d-1} & A_{d-2} & \cdots & & A_1 \\ 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ 0 & \cdots 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 \cdots 0 & 1 & & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_d(t) \end{bmatrix}$$

d-1 relazioni

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{-C_1} \qquad\qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{C_0}$$

supponendo $\det A_d \neq 0$, è un sistema di dm eq. differenziali in dm incognite

soluzioni speciali $\Leftrightarrow$ $e^{\lambda} \cdot v$ con (λ, v) autocoppia di $C(x)$ o di $A(x)$

per un autoval. k associato a un blocco di dimensione k

$\rightsquigarrow v_0 e^{\lambda t}$

$\rightsquigarrow (v_0 t + v_1) e^{\lambda t}$

$\vdots$

$\rightsquigarrow (v_0 t^2 + v_1 t + v_2) e^{\lambda t}$

$\vdots$

$\rightsquigarrow (v_0 t^{k-1} + v_1 t^{k-2} + \dots + v_{k-1}) e^{\lambda t}$

__def__: $v_0, v_1, \dots, v_{k-1}$ è una catena di J. a ∞ di lunghezza k per $A(x)$ $\Leftrightarrow$ $v_0, v_1, \dots v_{k-1}$ è una catena di Jordan di lunghezza k relativa a $\lambda = 0$ per rev $A(x)$

---

se $A(x)$ ha una catena di Jordan di lunghezza k, allora $C(x)$ (Frobenius comp. form) ha un blocco di Jordan di lunghezza k associato

$$0 = \lambda \begin{bmatrix} A_d & & & \\ & -I & & \\ & & \ddots & \\ & & & -I \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda^{d-1} v_0 & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \lambda^2 v_0 & \vdots \\ \lambda v_0 & \vdots \\ v_0 & \vdots \end{bmatrix}}_{W_0} + \begin{bmatrix} A_{d-1} & A_{d-2} & \cdots & A_0 \\ I & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 \\ & & I & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda^{d-1} v_0 & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \lambda v_0 & \vdots \\ v_0 & \vdots \end{bmatrix}}_{W_0}$$

$$0=\left(A_d\lambda^d+A_{d-1}\lambda^{d-1}+\dots+A_1\lambda+A_0\right)v_1+\left(A_d\cdot d\cdot\lambda^{d-1}+A_{d-1}(d-1)\cdot\lambda^{d-2}+\dots+A_1\right)v_0$$

$$\left(C_0+\lambda C_1\right)w_0=0$$

$$\underbrace{C_1}_{C'(\lambda)}w_0+\underbrace{\left(C_0+\lambda C_1\right)}_{C(\lambda)}w_1=0$$

$$0=\begin{bmatrix} A_d & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda^{d-1}v_0 \\ \vdots \\ \lambda^2 v_0 \\ \lambda v_0 \\ v_0 \end{bmatrix}}_{v_0}+\begin{bmatrix} A_{d-1} & A_{d-2} & \cdots & A_1 & A_0 \\ 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{d-1} \\ a_d \end{bmatrix}}_{w_1}+\lambda\begin{bmatrix} A_d & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{d-1} \\ a_d \end{bmatrix}}_{w_1}$$

$$0 = -v_0 + a_{d-1} - \lambda a_d$$

$$0 = -\lambda v_0 + a_{d-2} - \lambda a_{d-1}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$0 = -\lambda^{d-2} v_0 + a_1 + \lambda a_2$$

$$\underbrace{A_{d-1} \lambda^{d-1} v_0 + \dots + A_0 v_0}_{= -\lambda^d A_d v_0} = A_{d-1} a_1 + A_{d-2} a_2 + \dots + a_d A_0 + A_d a_1$$

$$\cancel{\begin{bmatrix} (d-1)\lambda^{d-1} v_1 \\ \vdots \\ 3\lambda^2 v_1 \\ 2\lambda v_1 \\ v_1 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

(interrotto)

$\boxed{\text{Se } \lambda = 0}$

$$\begin{cases} A_0 v_0 = 0 \\ A_1 v_0 + A_0 v_1 = 0 \\ A_2 v_0 + A_1 v_1 + A_0 v_2 = 0 \\ \vdots \end{cases} \iff A(x)\,v(x) \text{ ha i primi } k-1 \text{ coefficienti } 0$$

$$C_1 w_0 + C_0 w_1 = 0 \qquad w_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_0 \end{bmatrix} \qquad w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_d & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_0 \end{bmatrix}}_{w_0} + \begin{bmatrix} A_{d-1} & \cdots & & A_0 \\ 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_0 \\ v_1 \end{bmatrix}}_{w_1} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Esiste modo di mettere esplicitamente in relazione catene di J. di $A(x)$ e di $C(x)$

per $\lambda \neq \infty$

Per $\lambda = \infty$, <u>non</u> è più vero che $A(x)$ e $C(x)$ hanno catene di Jordan della stessa lunghezza.

perché la relazione $A(x) \sim E(x)B(x)F(x)$ con $E(x), F(x) \in \dot{\mathbb{C}}[x]^{n \times n}$ con det. costante non preserva catene di Jordan a ∞

$$\mathrm{rev}\, C(x) = \begin{bmatrix} A_d & & & & \\ & -I & & & \\ & & -I & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -I \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} A_{d-1} & A_{d-2} & \cdots & & A_0 \\ I & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & I & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A_d + xA_{d-1} & xA_{d-2} & & \cdots & xA_0 \\ xI & -I & & & \\ & xI & -I & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & xI & -I \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_d + xA_{d-1} & xA_{d-2} & \boxed{-} & xA_1 + x^2A_0 & xA_0 \\ xI & -I & & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & 0 & \vdots \\ & & xI & -I & 0 \\ & & & 0 & -I \end{bmatrix}$$

Facendo comb. lineari di colonne, mostriamo $\begin{bmatrix} \mathrm{rev}(H(x)) & \\ & \ddots \\ & & I \end{bmatrix}$

Per polinomi regolari, $\mathbb{C}(x)$ (così come tutte le linearizzazioni strong) preservano autovalori e lunghezze di blocchi di Jordan (incluso ∞)

Per un polinomio singolare, sono ben definiti i gradi minimi di una base polinomiale di $\operatorname{Ker}_{\mathbb{C}(x)} A(x)$ (e di $\operatorname{Ker}_{\mathbb{C}(x)} A(x)^T$)

$d_1 =$ minimo grado di un vettore $v(x) = v_0 + v_1 x + \dots + v_{d_1} x^{d_1}$ tale che $A(x)v(x) = 0$

$d_2 =$ minimo grado di un vettore $w(x) = w_0 + w_1 x + \dots + w_{d_2} x^{d_2}$ linearmente indip. da $v(x)$ e tale che $A(x)w(x) = 0$

⋮

continuo fino ad aver costruito una base di $\ker_{\mathbb{C}(x)} A(x)$

$(d_1, d_2, \dots d_k)$ sono univocamente determinati, non dipendono dalla scelta dei vettori

(per una pencil, sono le dim. dei blocchi di Kronecker $d_i \times (d_i+1)$)

e analogamente per $\ker A(x)^T$

$C(x)$ preserva i left minimal indices, e aumenta di $d-1$ i right min. indices

Esempio banale:

$$A(x) = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^{3} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

"grado"

$$\ker_{\mathbb{C}(x)} A(x) = \mathbb{C}(x)^2$$

base con gradi minimi: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\underbrace{d_1 = d_2 = 0}_{\text{right min. indices}}$

Analogamente, <u>left</u> min. indices sono $e_1 = e_2 = 0$

$$C(x) = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & & -x & & & \\ & 1 & & -x & & \\ \hline & & 1 & & -x & \\ & & & 1 & & -x \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -x \end{bmatrix}$$

right min. indices 2, 2

left. min ind. 0, 0

Generalizzazione di polinomi scalari

$$ax^2+bx+c \xrightarrow{1} \boxed{Ax^2+Bx+C}$$

matrix polynomials

② $\Rightarrow$ $aX^2+bX+cI$

Higham 'o8

o anche per serie di polinomi, es.

$$\exp(X) = I + X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3!}X^3 + \dots$$

matrix functions

$$\sqrt{X}, \quad \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ 1 & x>0 \end{cases}$$