Note Title 3/19/2019

Date catene di Jordan di un polinomio di matrici $A(x)$, come sono collegate le catene di Jordan della Frobenius companion linearization?

Idee:

1) $A(x)$ ha catena di Jordan $v_0, v_1 \dots v_{k-1}$ di lunghezza k in λ $\iff$ il polinomio $v(x) = v_0 + v_1(x-\lambda) + v_2(x-\lambda)^2 + \dots + v_{k-1}(x-\lambda)^{k-1}$ + (potenze più alte) è t.c. $(x-\lambda)^k \mid A(x)v(x)$

2) $v(x)$ catena di Jordan di $A(x)$ $\iff$ $\begin{bmatrix} v(x) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ catena di Jordan di $\begin{bmatrix} A(x) & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} = E(x)C(x)F(x)$

$\Leftarrow$ $F(x)\begin{bmatrix} v(x) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ catena di Jordan di $C(x)$

Mettendo tutto insieme, viene che $v(x)$ Jordan chain di $A(x)$

$$\Leftarrow \quad \begin{bmatrix} x^{d-1} \\ \vdots \\ x^2 \\ x \\ 1 \end{bmatrix}\left(v_0+v_1(x-\lambda)+v_2(x-\lambda)^2+\dots\right)$$

$$= w_0 + w_1(x-\lambda) + w_2(x-\lambda)^2 + \dots$$

$y := (x-\lambda)$

$$\begin{bmatrix} (y+\lambda)^{d-1} \\ \vdots \\ (y+\lambda)^2 \\ y+\lambda \\ 1 \end{bmatrix}\left(v_0+v_1 y+v_2 y^2+\dots\right) = \begin{bmatrix} \lambda^{d-1} \\ \vdots \\ \lambda^2 \\ \lambda \\ 1 \end{bmatrix} v_0 + y\begin{bmatrix} \lambda^{d-1}v_1+(d-1)\lambda^{d-2}v_0 \\ \vdots \\ \lambda^2 v_1+2\lambda v_0 \\ \lambda v_1+v_0 \\ v_1 \end{bmatrix} + y^2\begin{bmatrix} \dots \end{bmatrix} \dots$$

Data $f(x)$ scalare, come posso definire $f(A)$ per $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ quadrata?

$$f(x) = p_0 + p_1 x + \dots + p_{d-1} x^{d-1} \Rightarrow p_0 I + p_1 A + \dots + p_{d-1} A^{d-1} = f(A)$$

$$\exp(x) \Rightarrow \exp(A) \doteq I + A + \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \dots$$

Se $A = V \cdot \Lambda \cdot V^{-1}$ diagonalizzabile, $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m)$,

$$p(A) = p_0 I + p_1 A + \dots + p_{d-1} A^{d-1} = V \left(p_0 I + p_1 \Lambda + \dots + p_{d-1} \Lambda^{d-1} \right) V^{-1}$$

$$= V \cdot \begin{bmatrix} p(\lambda_1) & & & \\ & p(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & p(\lambda_m) \end{bmatrix} V^{-1}$$

Se A <u>non</u> diagonalizzabile, <u>Lemma</u>:

$$A = S \cdot J \cdot S^{-1} \quad \text{forma di Jordan}, \quad J = \text{blkdiag}(J_1, J_2, \dots, J_k)$$

allora

$$p(A) = S \begin{bmatrix} p(J_1) & & & \\ & p(J_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & p(J_k) \end{bmatrix} S^{-1},$$

e

$$p(J_i) = \begin{bmatrix} p(\lambda) & p'(\lambda) & \frac{1}{2}p''(\lambda) & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}p^{(n-1)}(\lambda) \\ & p(\lambda) & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2}p''(\lambda) \\ & 0 & & \ddots & p'(\lambda) \\ & & & & p(\lambda) \end{bmatrix}$$

<u>Dim</u>:

Sviluppo di Taylor:

$$p(x) = p(\lambda) + p'(\lambda)(x-\lambda) + \frac{p''(\lambda)}{2}(x-\lambda)^2 + \dots + \frac{p^{(d)}(\lambda)}{d!}(x-\lambda)^d$$

$$p(J_i) = p(\lambda)\cdot I + p'(\lambda)(J_i - \lambda I) + \frac{p''(\lambda)}{2}(J_i - \lambda I)^2 + \dots + \frac{p^{(d)}}{d!}(J_i - \lambda I)^d$$

$$J_i - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}^{n-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & \ddots & & & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}^n = 0$$

Quindi quella comb. lineare delle potenze è

$$\begin{bmatrix} p(\lambda) & p'(\lambda) & \cdots & \frac{p^{(n-1)}}{(n-1)!} \\ & p(\lambda) & \ddots & \vdots \\ & 0 & \ddots & p'(\lambda) \\ & & & p(\lambda) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix} & & & \\ & \begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix} & & \\ & & \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ & 5 \end{bmatrix} & \\ & & & \begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

f diff'le due volte in 1

e una volta in 5

Def: f definita sullo spettro di A

se f è derivabile almeno $k-1$ volte in λ per ogni blocco di Jordan di A in λ di dim. K

Interpolaz. di Hermite

$$p(x_i) = y_{i,0} \iff p_0 + p_1 x_i + p_2 x_i^2 + \dots + p_d x_i^d = y_{i,0}$$

$$p'(x_i) = y_{i,1} \iff p_1 + p_2 2x_i + \dots + p_d d x_i^{d-1} = y_{i,1}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$d+1=\sum m_i \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} & & \\ & V & \\ & & \end{bmatrix}}_{d+1=\sum m_i} \right. \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{1,0} \\ y_{1,1} \\ \vdots \\ y_{n,m_n} \end{bmatrix}$$

esiste un solo polinomio $\iff$ V è non-singolare

Supponiamo $Vz = 0$ per un vettore $z = \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_d \end{bmatrix}$

Definisco $z(x) = z_0 + z_1 x + \dots + z_d x^d$

Le righe di $Vz = 0$ mi dicono che

$$\left.\begin{array}{l} z(x_i) = 0 \\ z'(x_i) = 0 \\ \vdots \\ z^{(m_i - 1)}(x_i) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow (x - x_i)^{m_i} \mid z(x) \quad \forall i$$

$$(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \cdots (x - x_n)^{m_n} \mid z(x)$$

però $\deg z(x) < \sum m_i \Rightarrow z(x) \equiv 0$

$\Rightarrow z = 0$ per ogni $z \in \operatorname{Ker} V \Rightarrow V$ invertibile

---

Data $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, f definita su $\Lambda(A)$ spettro di A, prendiamo un polinomio di interpolazione di Hermite di f, cioè un polinomio t.c.

$$\begin{aligned} p(\lambda_i) &= f(\lambda_i), \\ p'(\lambda_i) &= f'(\lambda_i) \\ &\vdots \\ p^{(k-1)}(\lambda_i) &= f^{(k-1)}(\lambda_i) \end{aligned}$$

per ogni blocco di Jordan con autoval. λ_i e dim. k di A,

e definiamo $f(A) \doteq p(A)$

<u>Oss</u>: non dipende dalla scelta di p, perché $p(A)$ coinvolge solo le derivate che abbiamo prescritto

<u>Oss</u>: non compare più S, la matrice che mette A in forma di Jordan!

<u>Oss</u>: coincide con quella data prima, cioè

$$f(A) = S \begin{bmatrix} f(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(J_k) \end{bmatrix} S^{-1}, \quad f(J_i) = \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \cdots & \frac{f^{(k-1)}(\lambda_i)}{(k-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & f'(\lambda_i) \\ 0 & & & f(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

$$f\left(S \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{3} & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{matrix}} & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 & & & \\ & 3 & 1 & & \\ & & 3 & 1 & \\ & & & 3 & 1 \\ & & & & 3 \end{matrix}} \end{bmatrix} S^{-1}\right) = S \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} f(2) & f'(2) \\ 0 & f(2) \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{f(3)} & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} f(3) & f'(3) \\ 0 & f(3) \end{matrix}} & \\ & & & \boxed{B} \end{bmatrix} S^{-1}$$

$$B = \begin{bmatrix} f(3) & f'(3) & \frac{f''(3)}{2} & \cdots & \frac{f^{(4)}(3)}{4!} \\ & f(3) & f'(3) & \ddots & \\ & & f(3) & \ddots & \\ & & & f(3) & f'(3) \\ & & & & f(3) \end{bmatrix}$$

$$A = SJS^{-1}$$

$f(A) = p(A)$ per ogni pol. che soddisfa

$$f(2) = p(2)$$
$$f'(2) = p'(2)$$
$$f(3) = p(3)$$
$$f'(3) = p'(3)$$
$$\vdots$$
$$f^{(IV)}(3) = p^{(IV)}(3)$$

⚠ p dipende da A

$$\exp(A) = p_A(A)$$

$$\exp(B) = p_B(B)$$

⚠ forma di Jordan di A $\neq$ forma di Jordan di $f(A)$

se avete $f(x)$ t.c. $f'(A) = 0$

$$f\left(\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f(\lambda) & 0 & * & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \ddots & * \\ & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & & & \ddots & 0 \\ & & & & f(\lambda) \end{bmatrix}$$

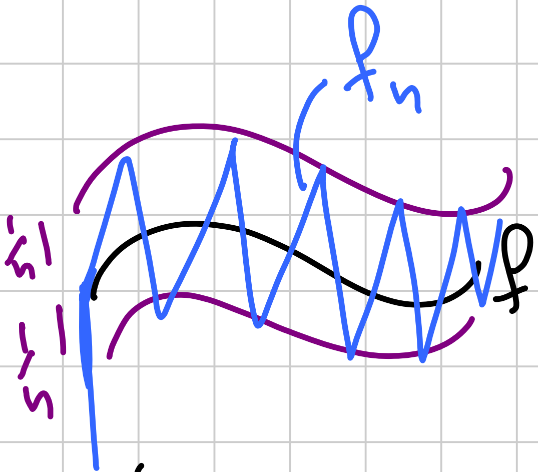
<u>non</u> ha la stessa forma di Jordan, perché

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix} - \lambda I \quad e \quad \begin{bmatrix} f(\lambda) & 0 & * & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \ddots & * \\ & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & & & \ddots & 0 \\ & & & & f(\lambda) \end{bmatrix} - f(\lambda) I$$

hanno ranghi diversi

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ & \lambda & 1 & 0 \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ & \lambda & 0 & 0 \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$$

⚠ **NON** è sufficiente che $f_n(x)$ converga a $f(x)$ per avere che $f_n(A) \to f(A)$ per ogni A



(è possibile costruire funzioni che convergono puntualmente a f, ma $f_n'(0) \not\to f'(0)$)

(basterà sicuramente $m-1$ derivate, dove $m = \dim(A)$)

Teo: se $A_n \to A$, allora $f(A_n) \to f(A)$

Dando per buono che il polinomio di interp. di Hermite di f è continuo nel (multi) insieme dei nodi, se prendo n suff. grande,

p_n polinomio di int. di Hermite sugli autoval. di A_n,

p polinomio di int. di Hermite su A,

$$\|f_n(A_n)-f(A)\| = \|p_n(A_n)-p(A)\| \leq \underbrace{\|p_n(A_n)-p(A_n)\|}_{\text{piccola a piacere per } n \text{ grande per continuità di } p_n\text{-op}} +$$

$$+ \underbrace{\|p(A_n)-p(A)\|}_{\text{piccola a piacere perché } A_n \to A}$$

$$\begin{array}{llll}
x_1 & \boxed{f(x_1)} & & \\
 & & \boxed{\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}} =: f[x_1,x_2] & \\
x_2 & f(x_2) & & \boxed{\dfrac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}} =: f[x_1,x_2,x_3] \\
 & & \dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} =: f[x_2,x_3] & \\
x_3 & f(x_3) & & f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]
\end{array}$$

$\vdots \quad \vdots$

$$\frac{\qquad}{x_4 - x_2} = f[x_2, x_3, x_4]$$

$$x_n \quad f(x_n) \quad \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} =: f[x_{n-1}, x_n]$$

$$p(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots$$

$$+ \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

Lemma: non esiste X t.c. $X^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

dim: se esistesse, sarebbe nilpotente, $X^4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Quindi X ha 0 come solo autovalore

Le matrici 2×2 che hanno 0 come solo autovalore hanno come forma di Jordan

- $\begin{bmatrix} \boxed{0} & \\ & \boxed{0} \end{bmatrix} = 0 = X$

- $X = S \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S^{-1}$, e quindi $X^2 = S \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 S^{-1} = 0$

$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ $\qquad 1 + J + \frac{J^2}{2} + \frac{J^3}{3!} + \dots$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3!} \cdot \begin{bmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{bmatrix} + \frac{1}{4!} \begin{bmatrix} \lambda^4 & 4\lambda^3 \\ 0 & \lambda^4 \end{bmatrix}$$