Funzioni di matrici

1) forma di Jordan + $f\left(\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{f''(\lambda)}{2} & \cdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & f'(\lambda) \\ & & & f(\lambda) \end{bmatrix}$

2) Polinomio di interpolazione di Hermite

su nodi λ_i (autovalori)

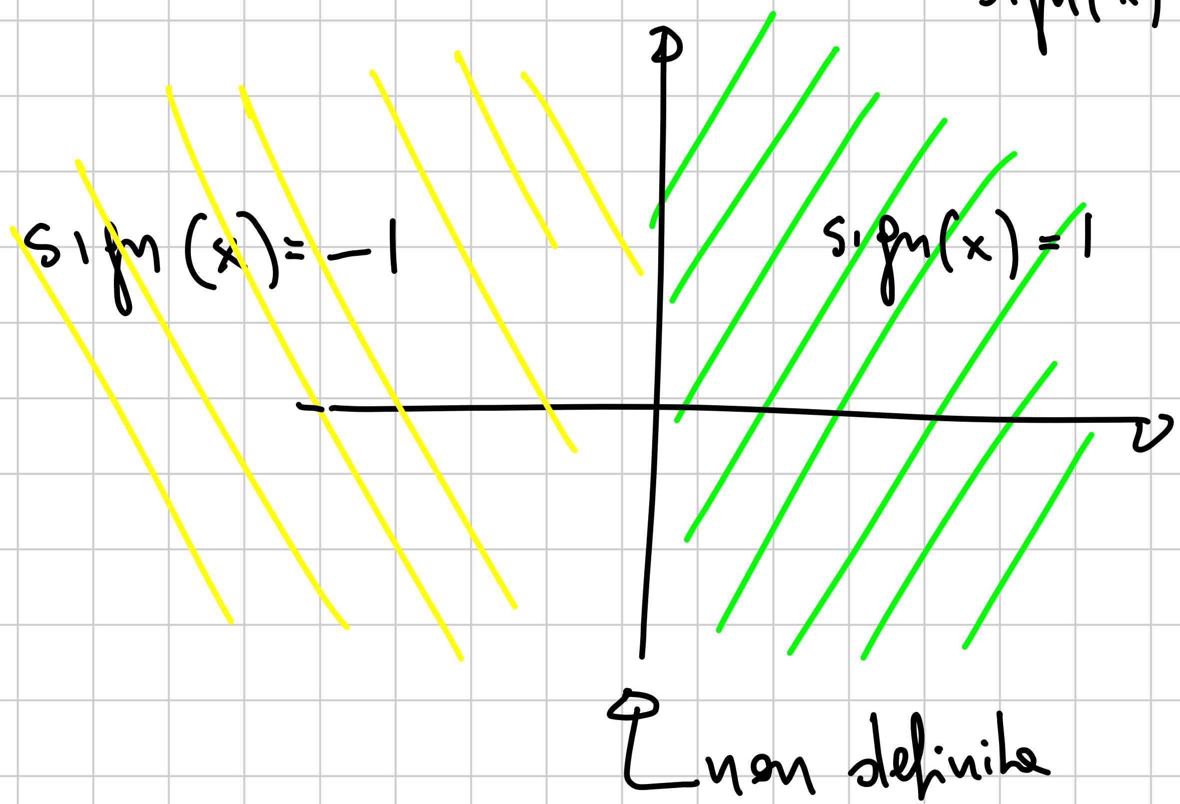
e molteplicità m_i = dim. del massimo blocco di Jordan con λ_i

Se valgono queste condizioni, $f(J_i) = p(J_i)$ per ogni blocco di Jordan di $A = SJS^{-1}$

e quindi $f(A) = \varphi(A)$

Funzione $\text{sign}(x)$:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} +1 & \operatorname{Re} x > 0 \\ -1 & \operatorname{Re} x < 0 \\ \text{non def. se} & \operatorname{Re} x = 0 \end{cases}$$



Possiamo applicarla a matrici che non hanno autovalori immaginari puri

$$0 = f'(x) = f''(x) = \dots$$

dove è definita

Se ordino gli autovalori in modo che i primi K (con molt.) hanno $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ e gli altri $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, allora

$$A = S J S^{-1}$$

$$\mathrm{sign}(A) = S \left[\begin{array}{c|c} \overbrace{-I}^{K \times K} & 0 \\ \hline 0 & \underbrace{I}_{(n-K)\times(n-K)} \end{array}\right] S^{-1}$$

$$\mathrm{Ker}\left(\mathrm{sign}(A) + I\right) = \mathrm{Ker}\left(S \left[\begin{array}{c|c} -I+I & 0 \\ \hline 0 & I+I \end{array}\right] S^{-1} \right) = \mathrm{Ker}\ S \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 2I \end{array}\right] S^{-1}$$

$= \mathrm{span}\Big($catene di Jordan che corrispondono a λ_i con $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0\Big)$

$$\operatorname{Ker}\left(\operatorname{sign}(A) - I\right) = \operatorname{Ker} S \left[\begin{array}{c|c} 2I & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] S^{-1} =$$

$$= \operatorname{span}\left(\text{catene di Jordan con } \operatorname{Re}(\lambda_i) > 0\right)$$

Se V_1 spanna il primo kernel, e V_2 spanna il secondo, allora $\left[V_1 \,\vdots\, V_2\right]$ è quadrata non sing., e

Gli spazi $\mathcal{V}_1 = \operatorname{span} V_1$, $\mathcal{V}_2 = \operatorname{span} V_2$ sono invarianti per A, cioè $A\mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}_1$, $A\mathcal{V}_2 \subseteq \mathcal{V}_2$

Se $w = \alpha v_1 + \alpha v_2 + \dots + \alpha v_k$, dove i v_i sono

o autovettori di A con $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ o

appartengono a catene di Jordan con $\lambda_i < 0$, e quindi

$$A w = \underbrace{\alpha A v_1}_{} + \underbrace{\alpha A v_2}_{} + \dots + \underbrace{\alpha A v_k}_{} \subseteq \operatorname{span}(v_1, v_2, \dots v_k)$$

tutte comb. lineari dei v_i, di nuovo

$$A\left[V_1 \,\vdots\, V_2\right] = \left[V_1 \,\vdots\, V_2\right]\left[\begin{array}{c:c} K_{11} & 0 \\ \hdashline 0 & K_{22} \end{array}\right]$$

per opportune matrici quadrate K_{11}, K_{22}

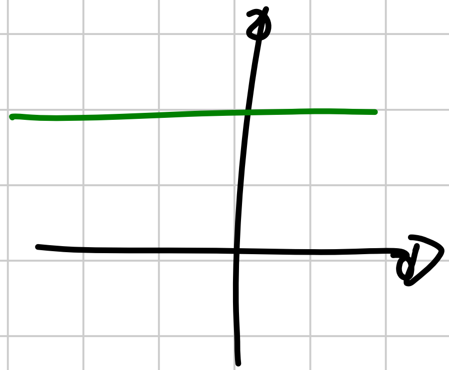
$$\Rightarrow \quad A = \left[V_1 \,\vdots\, V_2\right]\left[\begin{array}{c:c} K_{11} & 0 \\ \hdashline 0 & K_{22} \end{array}\right]\left[V_1 \,\vdots\, V_2\right]^{-1}$$

Ripetendo su $\operatorname{sign}(K_{11} - \mu I)$,

per un opportuno μ, posso separare autovettori a sx e a dx

della retta $x = \mu$

Posso separare anche rispetto a rette orizzontali calcolando sign $i(K_{11} - \mu I)$



V_1, V_2 a volte chiamati "sottosp. inv. stabile" e "sottosp. inv. antistabile di A", perché l'equazione differenziale

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} v(t) = A v(t) \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

ha una soluzione con $\| \lim_{t \to \infty} v(t) \|$ finito se e solo se $v_0 \in V_1$, span delle catene di J. nel semipiano sinistro.

Se non ci sono catene di J. non banali, allora le soluzioni di $\dot{v} = Av$ sono comb. lineari delle soluzioni particolari

$v_i(t) = e^{\lambda_i t} v_i$, dove (λ_i, v_i) coppia autoval/autovett. della matrice A,

quindi per avere sol. $v(t) = \sum \alpha_i e^{-\lambda_i t} v_i$ che sono limitate a ∞, devo prendere $\alpha_i = 0$ ogni volta che $\mathrm{Re}\ \lambda_i > 0$

$\Rightarrow v(0) = \sum \alpha_i v_i \in V_1$

$$v(t) = \exp(tA) \cdot v_0 = S \begin{bmatrix} \exp(t \cdot J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \exp(t \cdot J_n) \end{bmatrix} S^{-1} \cdot v_0$$

$$\exp(t\cdot J_1) = \begin{bmatrix} \exp(t\cdot\lambda_1) & t\cdot\exp(t\lambda_i) & \cdots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\exp(t\lambda_i) \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & t\exp(t\lambda_i) \\ 0 & & & \exp(t\lambda_1) \end{bmatrix}$$

$$f(x) = \exp(tx)$$
$$f'(x) = t\exp(tx)$$
$$f^{(k)}(x) = t^k\exp(tx)$$

$\exp(tJ_1) \to 0$ se e solo se $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$

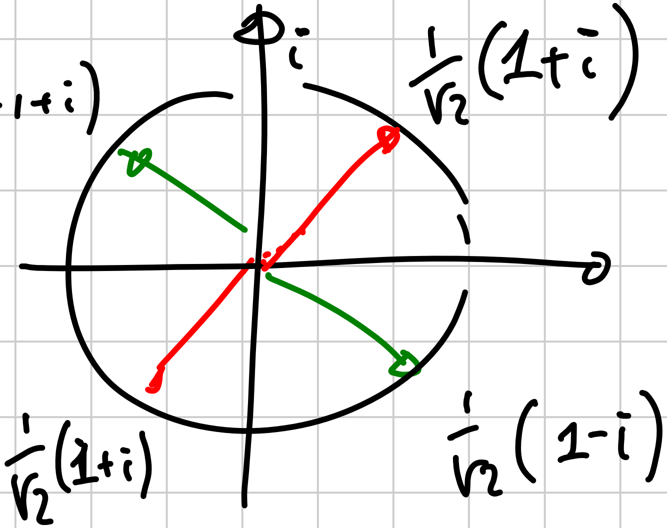
<u>Esempio</u> $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

con autovalori

$\lambda_1 = i \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \qquad \lambda_2 = -i \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$

$Av_1 = \begin{bmatrix} i \\ -1 \end{bmatrix} = i\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}.$

Dobbiamo scegliere una radice quadrata complessa per i e per $-i$, per esempio



$$\begin{cases} f(i) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \\ f(-i) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) \end{cases}$$ ("principal square root")

$$f(A) = V \cdot \begin{bmatrix} f(i) & \\ & f(-i) \end{bmatrix} \cdot V^{-1} =$$

Noto che $f(\pm i) = p(\pm i)$, dove $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+x)$,

quindi $f(A) = p(A) = \frac{1}{\sqrt{2}}(I + A) = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$

(soddisfa $f(A)^2 = A$)

Altro ramo:

$f(i) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ produce

$f(-i) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$

$$f(A) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} i & -i \\ i & i \end{bmatrix}$$

$A = S\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}S^{-1}$ ha radici quadrate (scegliendo opportunamente rami)

$$S\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \pm\sqrt{2} \end{bmatrix}S^{-1} \quad e \quad S\begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & \pm\sqrt{2} \end{bmatrix}S^{-1}$$

Però anche

$M = S\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & \sqrt{2} \end{bmatrix}S^{-1}$ è una matrice tale che $M^2 = A$

Posso ottenere più soluzioni di $X^2 = A$ facendo scelte diverse sui diversi blocchi con lo stesso autovalore

<u>non</u> sono funzioni di matrici con la nostra definizione

("radici non primarie")

$x_{k+1} = P x_k$, P matrice a elementi non-negativi ,

$e^T P = e^T$ per

e vettore di tutti uni

ad es. P modellizza evoluzione di una certa variabile giorno per giorno

Posso sapere com'è l'evoluzione ora per ora?

Esiste una matrice P_{ore} tale che

$y_0 \; y_1 \; y_2 \; \dots \; y_{24}$

$x_0 = y_0 \qquad x_1 = y_{24} \qquad x_2$

$y_{k+1} = P_{ore} \, y_k$ è la stessa evoluzione ora per ora?

$\underset{\sim}{P_{ore}^{24}} = P$

Mi serve una soluzione di $X^{24} = P$ che sia una matrice di probabilità, $X_{ij} \geq 0$ e $e^T X = e^T$

Di solito, se mi pongo questa domanda, c'è una funzione

$x(t)$ $\quad$ $x(t)$ $\quad$ $x(t) = \exp(Qt)\, x_0$

Q generatore (M-matrice singolare)

$$X^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = V \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} V^{-1}$$

tutte le matrici della forma $X = V\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}V^{-1}$

soddisfano $X^2 = A$

(e anche $\pm I$)

Se Γ contour complesso che contiene al suo interno tutti gli autoval. di A, allora

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\,(zI - A)^{-1}\,dz$$

(generalizza $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f z}{z - x}\,dz = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \text{Int}\,\Gamma \\ 0 & \text{se } x \text{ fuori} \end{cases}$)

<u>dim</u>: se $A = V\Lambda V^{-1}$ diagonalizzabile,

$$\frac{1}{2\pi i}\int f(z)(zI-A)^{-1}\,dz = V\cdot\left(\frac{1}{2\pi i}\int f(z)\,(zI-\Lambda)^{-1}\,dz\right)V^{-1} =$$

$$= V\cdot\begin{bmatrix} \frac{1}{2\pi i}\int f(z)(z-\lambda_1)^{-1}dz & & & \\ & \frac{1}{2\pi i}\int f(z)(z-\lambda_2)^{-1}dz & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{2\pi i}\int f(z)(z-\lambda_n)^{-1}dz \end{bmatrix}V^{-1}$$

$$= V\cdot\begin{bmatrix} f(\lambda_1) & & & \\ & f(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\lambda_n) \end{bmatrix}V^{-1}.$$

Se A non è diagonalizzabile, argomento di continuità:
prendo A_n diagonalizzabili che tendono ad A non diag.

(e con gli autoval. dentro Γ)

$$\int_\Gamma f(z)\,(zI - A_n)^{-1}\,dz = f(A_n)$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\int_\Gamma f(z)\,(zI - A)^{-1}\,dz = f(A)$$

Esempio di uso: volete calcolare $f(A)x$ per A larga e sparsa $\quad A \in \mathbb{C}^{n\times n} \quad x \in \mathbb{C}^n$

$$f(A)\cdot x = \int_\Gamma dz\, f(z)\,(zI - A)^{-1} x = \sum_{i=1}^{k} w_i\, f(z_i)\,(z_i I - A)^{-1} x$$

(formula di quadratura)

che costa come risolvere K sistemi lineari $y = (z_i I - A)^{-1} x$.

ES Metodo di Newton per calcolare $\sqrt{a}$ $a \in \mathbb{C}$ (una delle due):

$f(x) = x^2 - a \qquad f'(x) = 2x$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - a}{2x_k}$$

converge a una radice quadrata di a (almeno localmente)

Funziona la stessa iterazione su matrici?

X_0 fissato, $\quad X_{k+1} = X_k - (2X_k)^{-1}(X_k^2 - A)$.

ES:

se calcolo

$$B = f(A) = V \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n) \end{bmatrix} V^{-1}$$

, un errore di ϵ sul calcolo delle funzioni scalari

$$\tilde{B} = V \begin{bmatrix} f(\lambda_1)+\epsilon & & & \\ & f(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\lambda_n) \end{bmatrix} V^{-1}$$

$$\|B-\tilde{B}\| \leq \|V\| \cdot \left\| \begin{bmatrix} \epsilon & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \right\| \cdot \|V^{-1}\| = \epsilon \cdot K(V)$$

errori moltiplicati (caso pessimo) per la matrice degli autovet. V