Valutare polinomi scalari

1)
```
potenza = 1
valore = a0
for i = 1:d
    potenza = potenza * x
    valore = valore + a(i)*potenza
end
```

$x * x * x \cdots * x$ $\left\{ \begin{array}{l} 2d \text{ molt.} \\ d \text{ add.} \end{array} \right.$

2) Horner

$$\left(\cdots\left(\left(\left(a_d x + a_{d-1}\right)x + a_{d-2}\right)x + a_{d-3}\right)x + \cdots \quad \right)x + a_1\Big)x + a_0$$

```
valore = ad
for i = d:-1:1
    valore = valore * x + a_{i-1}
end
```

$\left\{ \begin{array}{l} d \text{ molt.} \\ d \text{ add} \end{array} \right.$

Horner stabile all'indietro (scarico errori su a_i)

Per polinomi di matrici (X matrice quadrata, a_i scalari)

- Funzionano entrambi
- <u>Non</u> stabili all'indietro, perché non lo è il prodotto di matrici: $C = AB$

$$|\tilde{C} - C| \leq |A| \cdot |B| \cdot O(u) \qquad (|A| \text{ elemento per elemento})$$

$$\begin{bmatrix} 1+\varepsilon & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$ ha errore prop a $\begin{bmatrix} 1+\varepsilon & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = O(1)u$

e non a $O(\varepsilon) \cdot u$

- Svanisce il vantaggio di costo di Horner: costano entrambi $dn^3 + O(dn^2)$

• Terzo metodo: spezzare il polinomio: ad es. per grado 8

1) calcolo $X^2 = X * X$, $X^3 = X^2 * X$, $X^6 = (X^3)^2$

$$\left(a_8 X^2 + a_7 X + a_6 I\right) X^6 + \left(a_5 X^2 + a_4 X + a_3 I\right) X^3 + \left(a_2 X^2 + a_1 X + a_0 I\right)$$

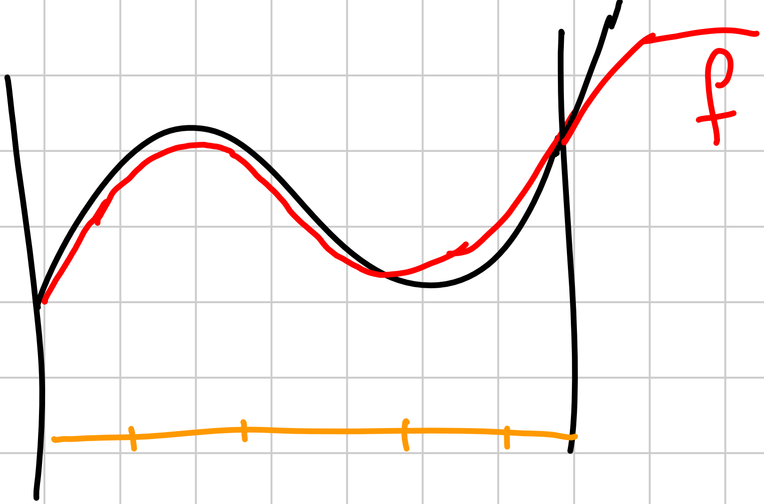
5 moltiplicazioni anziché 8

Paterson - Stockmayer

tutti questi metodi se implementati su un computer restituiscono Y t.c.

$$|Y - p(X)| \leq O(u)\left(|a_0| I + |a_1| \cdot |X| + |a_2| \cdot |X|^2 + \ldots + |a_d| \cdot |X|^d\right)$$

/P



Strategia: approssimare funzioni con polinomi globalmente su un intervallo (o una regione del piano complesso)

Se $p(x)$ è tale che $\left|f(x)-p(x)\right| \underset{x\in U}{<} \varepsilon$ su un certo intervallo,

e $\left|f^{(i)}(x)-p^{(i)}(x)\right| \underset{x\in U}{<} \varepsilon$ per $n-1$ derivate, allora per una matrice con autovalori in U

$$\|f(X)-p(X)\| = \|S\cdot f(J)\cdot S^{-1} - S\cdot p(J)\cdot S^{-1}\|$$

$$(X=S\cdot J\cdot S^{-1}) \qquad \leq \|S\|\cdot\|S^{-1}\|\cdot O(\varepsilon)$$

Scelta di p: 1) polinomi di approssimazione (ad es. minimax)
2) polinomio di Taylor

$X = SJS^{-1}$ forma di Jordan

$$\|f(X) - p_d(X)\| = \|S f(J) S^{-1} - S\, p_d(J)\, S^{-1}\| \leq$$

$$\leq \|S\| \cdot \|S^{-1}\| \cdot \| f(J) - p_d(J) \|$$

$$f(J_i) - p_d(J_i) = \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(k-1)!} f^{(k-1)}(\lambda_i) \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & f'(\lambda_i) \\ & & & f(\lambda_i) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_d(\lambda_i) & p_d'(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(k-1)!} p_d^{(k-1)}(\lambda_i) \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & p_d'(\lambda_i) \\ & & & p_d(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

p_d' è il polinomio di Taylor di grado $d-1$ di f'

$p_d^{(k)}$ è il pol. di Taylor di grado $d-k$ di $f^{(k)}$

$$f(J_i) - p_d(J_i) \to 0 \quad \text{quando} \quad d \to \infty.$$

$$\frac{\cancel{x}^{k}}{k!} = \left(\frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \right) \cdot \frac{\cancel{x}}{k}$$

$$A = Q \begin{bmatrix} 30 & 0 \\ 0 & -30 \end{bmatrix} Q^T \qquad \exp(A) = Q \begin{bmatrix} \exp(30) & 0 \\ 0 & \exp(-30) \end{bmatrix} Q^T$$

$$Q \left[\exp(-A) \right]^{-1} Q^T = Q \begin{bmatrix} \exp(-30) & 0 \\ 0 & \exp(30) \end{bmatrix}^{-1} Q^T$$

Approssimazioni di Padé:

<u>es</u>: $$\exp(x) = \frac{1+\frac{1}{2}x}{1-\frac{1}{2}x} + O(x^3)$$

$$= \left(1+\frac{1}{2}x\right)\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2+O(x^3)\right) = 1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x^2+O(x^3)$$

$$= 1+x+\frac{1}{2}x^2+O(x^3)$$

$$f(x) = \frac{p_0+p_1x+\ldots+p_dx^d}{1+q_1x+q_2x^2+\ldots+q_ex^e} + O(x^{d+e+1})$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x)\left(1+q_1x+q_2x^2+\ldots+q_ex^e\right) = p_0+p_1x+\ldots+p_dx^d+O(x^{d+e+1})$$

$$\left(f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \dots + f_{d+e} x^{d+e} + O\left(x^{d+e+1}\right)\right)\left(1 + q_1 + \dots + q_e x^e\right) = p_0 + \dots p_d x^d + O\left(x^{d+e+1}\right)$$

$d+e+1$ equazioni
$d+e+1$ incognite $\to$ risolubile, a meno di scelte sfortunate di (funzione, gradi)

$\exp(x)$:

deg q \ deg p	0	1	2
0	1	$1+x$	$1+x+x^2/2$
1	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{1+x}{1-x}$	
2	$\frac{1}{1-x+\frac{x^2}{2}}$		

$$\exp(x) = \frac{1}{1-x} \qquad \exp(x) = \frac{1}{1-x+x^2/2}$$

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ tutte le approssimanti di Taylor in 0 hanno regione di convergenza

$|x| < 1$

Calcolare funzioni di matrici tramite forma di Schur:

$$A = \underset{\text{ortog.}}{Q} \underset{\text{triang. superiore}}{T} Q^{-1}$$

Vale che

$$f(A) = Q f(T) Q^{-1}$$

Difatti:

- se f è un polinomio, ovvio
- per f, A fissate, esiste p t.c. $f(A) = p(A)$

Ci resta da capire come calcolare $f(T)$.

ex:

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ 0 & t_{22} \end{bmatrix} \qquad f(T) = \begin{bmatrix} s_{11} & \boxed{s_{12}} \\ 0 & s_{22} \end{bmatrix}$$

$s_{21} = 0$ perché posso rimpiazzare la f con un polinomio sempre perché sono polinomi, $s_{11} = f(t_{11})$, $s_{22} = f(t_{22})$

Per calcolare s_{12}, trucco:

$$T f(T) = f(T) T$$

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ 0 & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ 0 & s_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ 0 & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ 0 & t_{22} \end{bmatrix}$$

$$t_{11}s_{12}+t_{12}s_{22} = s_{11}t_{12}+s_{12}t_{22}$$

$$s_{12} = \frac{s_{22}-s_{11}}{t_{22}-t_{11}}\, t_{12} = \frac{f(t_{22})-f(t_{11})}{t_{22}-t_{11}} \cdot t_{12} \qquad (*)$$

Se $t_{11}=t_{22}$, mi serve sapere anche il valore della derivata

passando al limite $(*)$, $\quad s_{12} = f'(t_{11}) \cdot t_{12}$

Per blocchi più grandi:

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ 0 & t_{22} & t_{23} \\ 0 & 0 & t_{33} \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ 0 & s_{22} & s_{23} \\ 0 & 0 & s_{23} \end{bmatrix}$$

$$s_{ii} = f(t_{ii})$$

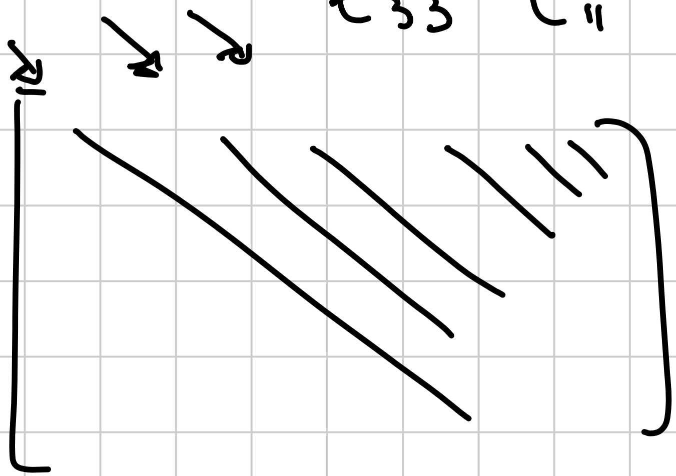
Da $\boxed{TS = ST}$:

$(1,2)$: $t_{11}s_{12} + t_{12}s_{22} = s_{11}t_{12} + s_{12}t_{22} \iff \frac{s_{22}-s_{11}}{t_{22}-t_{11}} \cdot t_{12} = s_{12}$

$(2,3)$ $t_{22}s_{23} + t_{23}s_{33} = s_{22}t_{23} + s_{23}t_{33} \iff \frac{s_{33}-s_{32}}{t_{33}-t_{32}} \cdot t_{23} = s_{23}$

$(1,3)$ $t_{11}s_{13} + t_{12}s_{23} + t_{13}s_{33} = s_{11}t_{13} + s_{12}t_{23} + s_{13}t_{33}$

$$s_{13} = \frac{\text{(numeratore noto)}}{t_{33} - t_{11}}$$



Parlett recurrence

In generale, se $t_{ii} \neq t_{jj}$ $\forall i,j$, si riesce a calcolare tutti gli elementi di S "una sopradiag. alla volta".

$\rightsquigarrow$ Problemi quando $t_{ii} - t_{jj}$ è zero oppure piccolo

Soluzione: fare lo stesso conto, ma a blocchi.

Formula generica:

$$T_{ii} S_{ij} - S_{ij} T_{jj} = (\text{somma di blocchi noti})$$

equazione di Sylvester, sappiamo come risolverla.

- risolubile se T_{ii} e T_{jj} non hanno autoval. comuni
- algoritmo risolutivo: ~~riduco T_{ii}, T_{jj} in forma triangolare~~ + sostituzioni successive.

esattamente le stesse formule viste sopra

sono già blocchi di una forma di Schur

(In realtà, questo algoritmo si può reinterpretare come un algoritmo per risolvere l'eq. di Sylvester singolare $\underbrace{TS - ST}= 0$ per una soluzione S imponendo che gli elem. diagonali siano $s_{ii} = f(t_{ii})$)

Algoritmo di Parlett (scalare)

Algoritmo di Schur-Parlett (a blocchi)

1) Calcolo forma di Schur
2) per calcolare $f(T)$, la divido a blocchi, facendo in modo che autovalori vicini finiscano nello stesso blocco,

$$T = \begin{bmatrix} \boxed{T_{11}} & T_{12} & \cdots & T_{1k} \\ 0 & \boxed{T_{22}} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{T_{kk}} \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} S_{11} & \cdots & \cdots & S_{1k} \\ 0 & S_{22} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & S_{kk} \end{bmatrix}$$

3) Calcolo $S_{ii} = f(T_{ii})$ tramite polinomio di Taylor centrato nel baricentro degli autovalori di T_{ii}

4) Uso Parlett recurrence per calcolare blocchi fuori dalla diagonale