Note Title 3/27/2019

Schur-Parlett algorithm (versione scalare, assumendo eig(A) distinti)

Calcola $f(A)$, f generica

1) $A = QTQ^T$, $f(A) = Q f(T) Q^T$ $\quad S = f(T)$

S triang. superiore

2) $s_{ii} = f(t_{ii})$

3) Calcolo elementi sopradiag. di S per sostituzioni successive

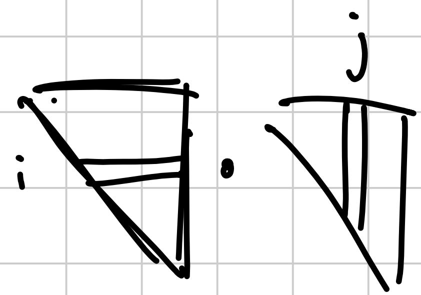
$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & t_{nn} \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & s_{nn} \end{bmatrix}$$

usando le equazioni date da $TS - ST = 0$ $(*)$

$(i, i+1)$ di $(*)$: $t_{ii} s_{i,i+1} + t_{i,i+1} s_{i+1,i+1} - s_{ii} t_{i,i+1} - s_{i,i+1} t_{i+1,i+1} = 0$

$$\Rightarrow s_{i,i+1} = \frac{s_{i+1,i+1} - s_{i,i}}{t_{i+1,i+1} - t_{ii}} t_{i,i+1}$$

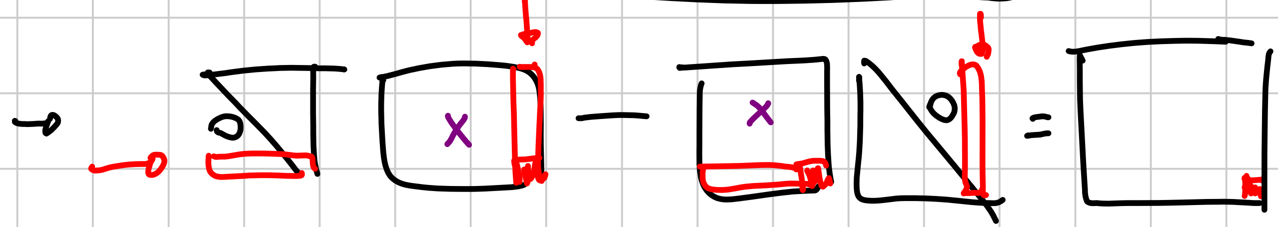
(i,j) $$\sum_{k=i}^{j}\left(t_{ik}s_{kj}-s_{ik}t_{kj}\right)=0$$



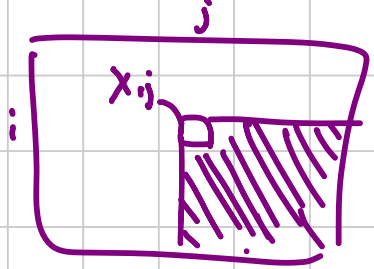
$$t_{ii}s_{ij}+\sum_{k=i+1}^{j}t_{ik}s_{kj}-s_{ij}t_{jj}-\sum_{k=i}^{j-1}s_{ik}t_{kj}=0 \qquad (*)$$

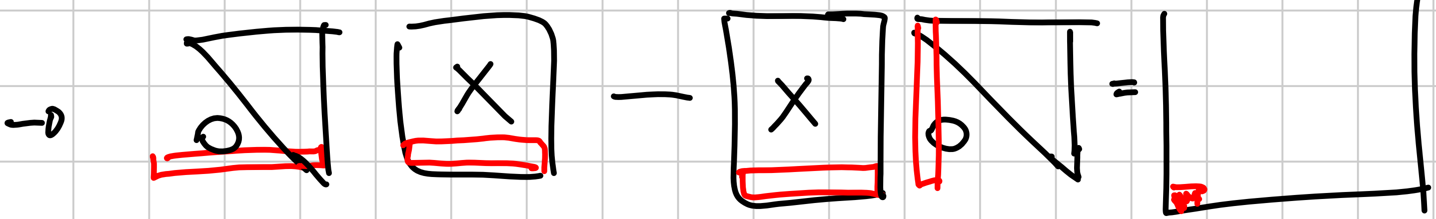
$$s_{ij}=\frac{\sum_{k=i+1}^{j}t_{ik}s_{kj}-\sum_{k=i}^{j-1}s_{ik}t_{kj}}{t_{jj}-t_{ii}}$$

<u>Osservazione</u>: questo algoritmo assomiglia molto a risolvere un'equazione di Sylvester; $TS-ST=0$ è un'eq. di Sylvester ma è singolare $\underbrace{\left(-T^T\otimes I+I\otimes T \text{ è singolare}\right)}$

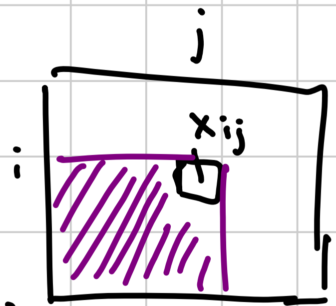


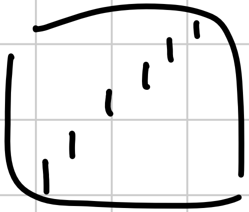
nell'equazione X_{ij} compaiono





nell'equazione (i,j) compaiono



(probabilmente anche equivalenti moltiplicando opportunamente per ).

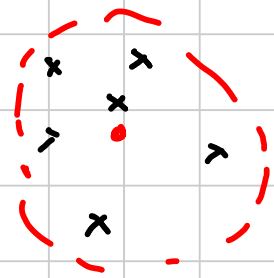
Schur-Parlett a blocchi:

1) $A = QTQ^T$, $f(A) = Q f(T) Q^T$

2) Per calcolare $f(T)$, la divido in blocchi in modo che autovalori vicini stiano nello stesso blocco (riordinando la forma di Schur)

$$T = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} T_{11} & * & * & * & * \; * \\ \hline 0 & T_{22} & * & * & * \; * \\ \hline 0 & 0 & \ddots & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & & * \; * \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & T_{nn} \end{array}\right] \qquad S = \begin{bmatrix} S_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & S_{nn} \end{bmatrix}$$

3) calcoliamo $S_{ii} = f(T_{ii})$ tramite sviluppo di Taylor in un α "vicino" ai suoi autovalori

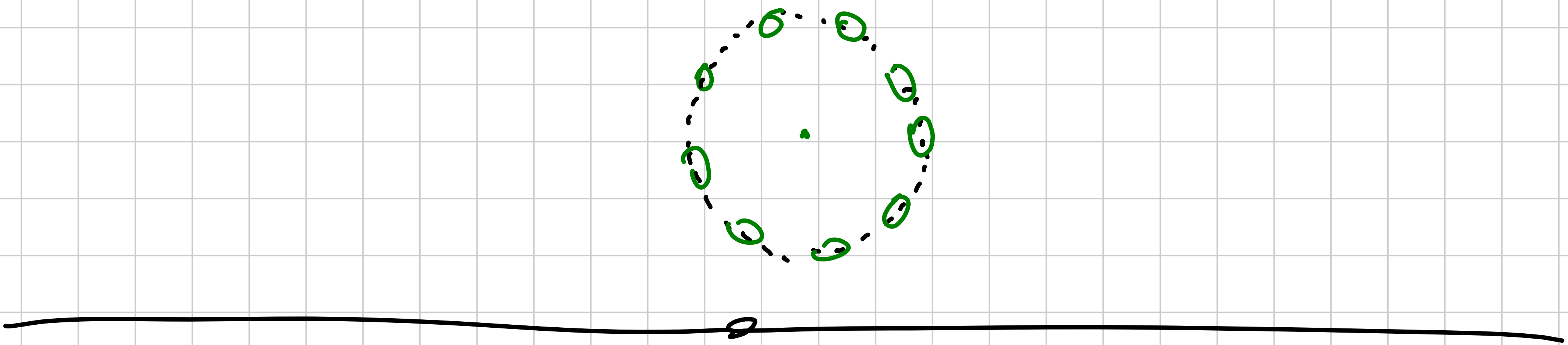


$$S_{ii} = f(\alpha) I + f'(\alpha)(X - \alpha I) + \frac{f''(\alpha)}{2}(X - \alpha I)^2 + \dots$$

4) Calcoliamo i blocchi fuori dalla diag. S_{ij}, $i \neq j$, risolvendo equazioni di Sylvester

$$T_{ii} S_{ij} - S_{ij} T_{jj} = \sum_{k=i+1}^{j} T_{ik} S_{kj} - \sum_{k=i}^{j-1} S_{ik} T_{kj}$$

(T_{ii}, T_{jj} sono già triangolari)



$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -X \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix}$$

se X soddisfa $T_{11}X - XT_{22} + T_{12} = 0$

$$f(T) = \begin{bmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{bmatrix} f\left(\begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} 1 & -X \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(T_{11}) & 0 \\ 0 & f(T_{22}) \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & -X \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

Z

$$= \begin{bmatrix} f(T_{11}) & Xf(T_{22}) \\ 0 & f(T_{22}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -X \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(T_{11}) & Xf(T_{22}) - f(T_{11})X \\ 0 & f(T_{22}) \end{bmatrix}$$

se X risolve $T_{11}X - XT_{22} + T_{12} = 0$

allora $Z = Xf(T_{22}) - f(T_{11})X$ risolve $T_{11}X - XT_{22} + T_{12}f(T_{22}) - f(T_{11})T_{12} = 0$

Risolvono eq. di Sylvester diverse, ma con stesso operatore lineare $X \longmapsto T_{11}X - XT_{22}$

$$\operatorname{vec} X \longmapsto \left[I \otimes T_{11} - T_{22}^T \otimes I \right] \operatorname{vec} X$$

$$\operatorname{sep}(T_{11}, T_{22}) := \sigma_{\min}\left(I \otimes T_{11} - T_{22}^T \otimes I \right).$$

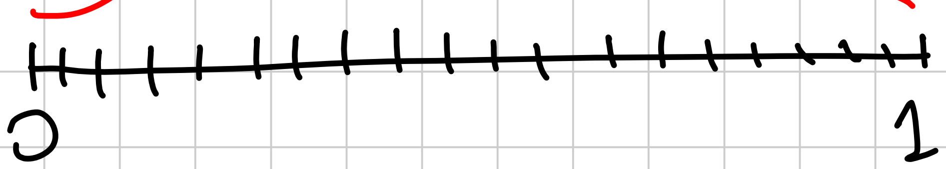
$\mathrm{expm}(1 \cdot A) \cdot v$

$$\begin{cases} x(0) = v \\ \frac{d}{dt} x(t) = A x(t) \end{cases}$$

$x(t) = \exp(tA) \cdot v$

calcolo per $t = 1$

Eulero esplicito: divido $[0,1]$ in n intervalli di ampiezza $h = \frac{1}{n}$



$x(0) = v$

$x(h) = (I + h \cdot A) v$

$x(2h) = (I + hA)(I + hA) v$

$\vdots$

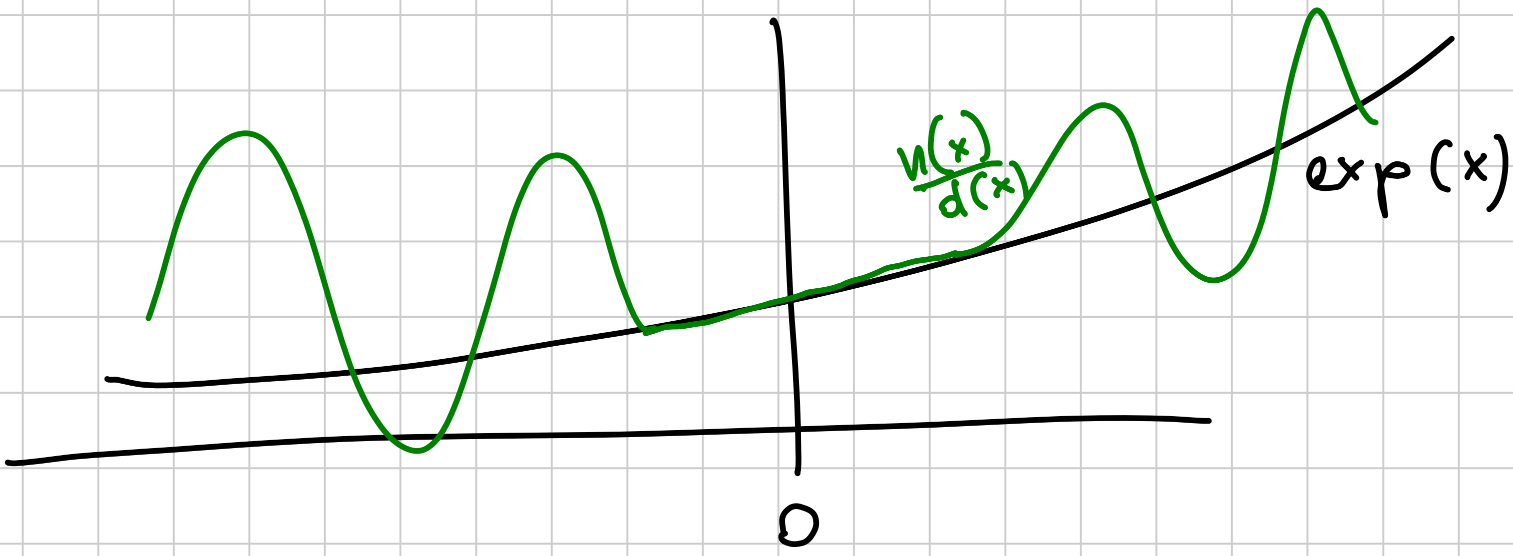
$x(1) = x(nh) = (I + hA)^n v$

$= \left(I + \frac{1}{n} A\right)^n v$

Approssimazione di Padé di $\exp(x)$:

esiste una funzione razionale $\frac{n(x)}{d(x)}$, con n, d polinomi,

tale che $\exp(x) - \frac{n(x)}{d(x)} = O\left(x^{\deg n + \deg d + 1}\right)$ per $x \to 0$



Errore numerico con l'approssimazione di Padé:

definiamo $h(x) = \log\left(\frac{n(x)}{d(x)} \exp(-x)\right)$

$H = h(A)$ esiste per A con autoval. sufficientemente piccoli (perché per $x \approx 0$ $\frac{n(x)}{d(x)} \exp(-x) \approx 1 + O\left(x^{\deg n+\deg d+1}\right)$

e quindi il logaritmo esiste)

$$\exp(H) = D(A)^{-1} N(A) \exp(-A)$$

$$\exp(H)\exp(A) = D(A)^{-1} N(A)$$

$$= \exp(H+A)$$

(perché sono tutte funzioni di matrice di A, quindi ultimamente polinomi in A)

$$\underbrace{\exp(A+H)}_{\text{esponenziale esatto di } A+H=\tilde{A}} = \underbrace{D(A)^{-1} N(A)}_{\text{approssimazione di Padé di } \exp(A)}$$

Relazione tipo errore all'indietro

se riuscissimo a provare che $\frac{\|H\|}{\|A\|}$ è dell'ordine della precisione di macchina, allora questa approssimazione calcola esattamente $\exp(\tilde{A})$ con $\frac{\|\tilde{A}-A\|}{\|A\|} = O(u)$, cioè è stabile all'indietro.

$$\frac{n(x)}{d(x)} \exp(-x) = 1 + O\left(x^{p+q+1}\right)$$

$p = \deg n$

$q = \deg d$

$$h(x) = \log\left(1 + O(x^{p+q+1})\right) = O(x^{p+q+1})$$

$$= h_{p+q+1}\, x^{p+q+1} + h_{p+q+2}\, x^{p+q+2} + \dots$$

(sviluppo di Taylor in 0)

$$\|h(A)\| \leq |h_{p+q+1}| \cdot \|A\|^{p+q+1} + |h_{p+q+2}| \cdot \|A\|^{p+q+2}$$
$$+ |h_{p+q+3}| \cdot \|A\|^{p+q+3} + \dots$$

"Scaling and squaring"

$$\exp(A) = \exp\left(\tfrac{1}{2}A\right)^2 \qquad \exp(A) = \underbrace{\exp\left(\tfrac{1}{2^n}A\right)}^{2^n}$$

1) Trovo n t.c. $\left\| \frac{1}{2^n} A \right\| \leq 5.4$

2) Calcolo $M = \exp\left(\frac{1}{2^n} A\right)$ tramite appross. di Padé con $p = q = 13$

3) Calcolo $\exp(A) = M^{2^n}$ con n quadrati successivi.