Note Title 4/3/2019

Teo: se f è di classe $C^{2m-1}(U)$, allora $L_{f,X}$ esiste per ogni $X \in \mathbb{R}^{m \times m}$ con autovalori in U

dim: dalla dim. del teorema della volta precedente,

$$f\left(\begin{bmatrix} X+\varepsilon E & E \\ 0 & X \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f(X+\varepsilon E) & \frac{f(X+\varepsilon E)-f(X)}{\varepsilon} \\ 0 & f(X) \end{bmatrix}$$

$\forall \varepsilon > 0$ ed è continuo

Se $f \in C^{2m-1}$, il limite al LHS esiste, quindi anche quello
$\varepsilon \to 0$

a destra, e $\dfrac{f(X+\varepsilon E)-f(X)}{\varepsilon}$ esiste ed è continua.

$f:\mathbb{R}^{m\times m}\to\mathbb{R}^{m\times m}$ è una funzione multivariata che ha le derivate direzionali continue $\Rightarrow$ Jac f esiste.

<u>Teo</u>: se X ha autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m$, allora

$L_{f,X}$ ha autovalori

$$f[\lambda_i, \lambda_j] = \begin{cases} \dfrac{f(\lambda_j)-f(\lambda_i)}{\lambda_j-\lambda_i} & \text{se } \lambda_i \neq \lambda_j \\ f'(\lambda_i) & \text{se } \lambda_i = \lambda_j \end{cases} \qquad i,j=1,2,\dots m$$

<u>Dim</u>:

1) Posiamo rimpiazzare la f con un polinomio tale che $f(X)=p(X)$ e $f\left(\begin{bmatrix} X & E \\ 0 & X \end{bmatrix}\right)=p\left(\begin{bmatrix} X & E \\ 0 & X \end{bmatrix}\right)$ $\forall E$

$$\Updownarrow$$

$$L_{f,X}(E)=L_{p,X}(E) \quad \forall E$$

(basta prendere $p(x)$ tale che

$$f^{(k)}(\lambda_i)=p^{(k)}(\lambda_i) \quad \forall \lambda_i \text{ autoval. di } X$$

$$\text{e } \forall\, k<2\cdot(\text{massima molt. alg. di } \lambda_i)\,)$$

2) Calcolo la der. di Fréchet del polinomio:

$$p(X+E)=p_0 I+p_1(X+E)+p_2(X+E)^2+\dots+p_d(X+E)^d=$$

$$=\underline{p_0 I}+\underline{p_1(X}+\underset{\sim}{E})+p_2(\underline{X^2}+\underset{\sim}{XE+EX}+\cancel{E^2})+\dots+p_d(\underline{X^d}+\underset{\sim}{X^{d-1}E}+\underset{\sim}{X^{d-2}EX}+\dots$$

$$\ldots + EX^{d-1} + \cancel{X^{d-2}E^2 + \ldots + E^d})$$

$$= p(X) + p_1 E + p_2 (XE + EX) + p_3 (X^2 E + XEX + EX^2) + \ldots + p_d \Big(\underbrace{X^{d-1}E + \ldots + EX^{d-1}}_{\sum_{i=0}^{d-1} X^i E X^{d-1-i}}\Big) + o(\|E\|)$$

$$K_{f,X} = p_1 \cdot I_{m^2} + p_2 \cdot (1 \otimes X + X^T \otimes 1) + p_3 (1 \otimes X^2 + X^T \otimes X + (X^2)^T \otimes 1) + \ldots$$

$$\ldots + p_d \sum_{i=0}^{d-1} (X^{d-1-i})^T \otimes X^i .$$

$A \otimes B$ $\quad A = Q_A T_A Q_A^*, \quad B = Q_B T_B Q_B^*$

$$A \otimes B = (Q_A \otimes Q_B)(T_A \otimes T_B)(Q_A \otimes Q_B)^*$$

[$\Rightarrow$ gli autoval. di $A \otimes B$ sono $\lambda_i \cdot \mu_j$, $\forall$ λ_i autoval. di A, μ_j autoval. di B]

In questo caso, prendiamo $\cancel{X} = Q T_1 Q^*$

$$X^T = U T_2 U^*$$

$$K_{f,X} = (U \otimes Q) \Big[p_1 I_{n^2} + p_2 (1 \otimes T_1 + T_2 \otimes 1) + p_3 (1 \otimes T_1^2 + T_2 \otimes T_1 + T_2^2 \otimes 1)$$

$$+ \dots + p_d \sum_{i=0}^{d-1} T_2^{d-1-i} \otimes T_1^i \Big] (U \otimes Q)^*$$

$$\sum_{k=1}^{d} p_k \sum_{h=1}^{k} T_2^{k-h} \otimes T_2^{h-1}$$ ha come autovalori

$$\sum_{k=1}^{d} p_k \sum_{h=1}^{k} \lambda_i^{k-h} \lambda_j^{h-1} \qquad \forall\, i,j = 1,\dots m$$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_i^2 + \lambda_i\lambda_j + \lambda_j^2 = \dfrac{\lambda_j^3 - \lambda_i^3}{\lambda_j - \lambda_i} \quad \text{oppure } 3\lambda_i^2 \text{ se } \lambda_i = \lambda_j \\ \lambda_i^3 + \lambda_i^2\lambda_j + \lambda_i\lambda_j^2 + \lambda_j^3 = \dfrac{\lambda_j^4 - \lambda_i^4}{\lambda_j - \lambda_i} \quad \text{oppure } 4\lambda_i^2 \text{ se } \lambda_i = \lambda_j \end{array}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{d} p_k (x^k)[\lambda_i, \lambda_j] = p[\lambda_i, \lambda_j] = f[\lambda_i, \lambda_j].$$

$$L_{f,X} = V \Lambda V^{-1} \qquad (\text{se } L_{f,X} \text{ diagonalizzabile})$$

$$\|L_{f,X}\|_2 \lesssim \kappa(V) \cdot \max |f[\lambda_i, \lambda_j]|.$$

Una $L_{f,X}$ può essere grande per "colpa" di un suo autoval. grande oppure perché $\kappa(V)$ è grande

---

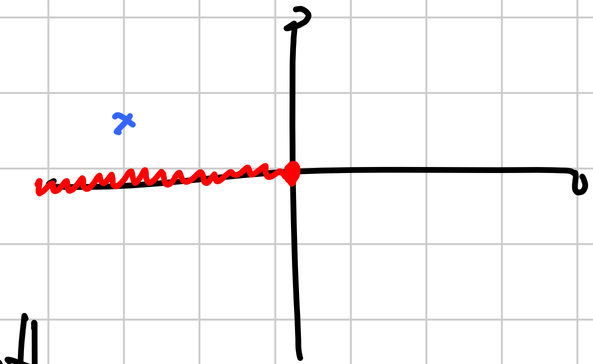
ES: sqrtm(X) (presa come il ramo sul semipiano destro)

Si ha $\quad L_{f,X} = \left(I \otimes Y + Y^T \otimes I\right)^{-1}, \quad Y = f(X)$

ha autovalori $\quad \dfrac{1}{\mu_i + \mu_j}, \quad \mu_i, \mu_j$ autoval. di $f(X)$

cioè $\quad \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i} + \sqrt{\lambda_j}}, \quad \lambda_i, \lambda_j$ autoval. di X

Questi sono sempre $\neq 0$ se λ_i, λ_j non stanno sulla semiretta $[-\infty, 0]$,

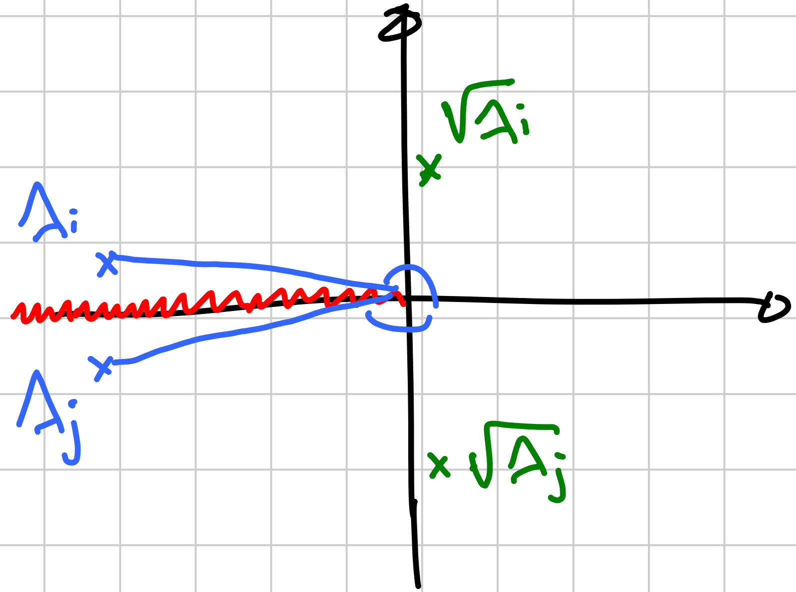


perché $\mathrm{Re}\sqrt{\lambda_i}, \mathrm{Re}\sqrt{\lambda_j} > 0$ se λ_i, λ_j non stanno sulla semiretta

$\sqrt{\lambda_i} + \sqrt{\lambda_j} \approx 0$ se

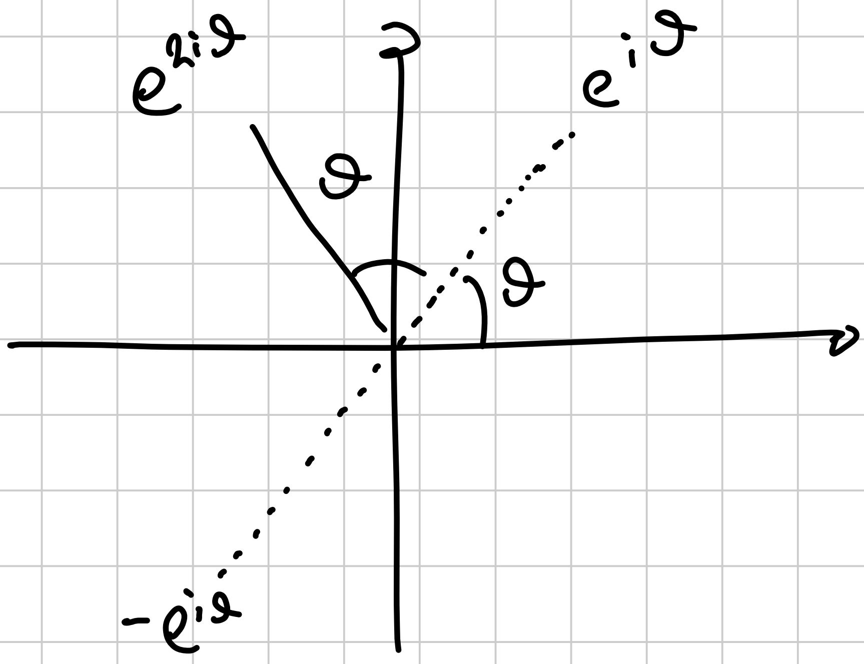
$\mathrm{Re}\sqrt{\lambda_i}$ è piccola e

$\sqrt{\lambda_j} \approx \overline{\sqrt{\lambda_i}}$



Oss: $\mathrm{sign}(z) = \dfrac{z}{\sqrt{z^2}}$ $\qquad z = re^{i\vartheta}$

$$\frac{z}{\sqrt{z^2}} = \frac{\cancel{r}e^{i\vartheta}}{\cancel{r}\cdot\sqrt{e^{2i\vartheta}}}$$



Le due radici quadrate di $e^{2i\vartheta}$ sono $\pm e^{i\vartheta}$

Quella che sta nel semipiano positivo è $e^{i\vartheta}$ se $\vartheta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

e $-e^{i\vartheta}$ altrimenti

e anche $\quad \operatorname{Sign}(A) = A \cdot \operatorname{sqrtm}(A^2)^{-1}$

(autoval. distinti + argomento di continuità)

Th:

$$\operatorname{sign}\left(\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & C \\ C^{-1} & 0 \end{bmatrix}, \text{ dove } C = A(BA)^{-1/2}$$

in part.,

$$\operatorname{sign}\left(\begin{bmatrix} 0 & A \\ I & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & A^{1/2} \\ A^{-1/2} & 0 \end{bmatrix}$$

dim:

$$\operatorname{sign}\left(\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix} \cdot \left[\operatorname{sqrtm}\left(\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^2\right)\right]^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix} \left[\operatorname{sqrtm}\left(\begin{bmatrix} AB & 0 \\ 0 & BA \end{bmatrix}\right)\right]^{-1}$$

c

$$= \begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (AB)^{-1/2} & 0 \\ 0 & (BA)^{-1/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \overbrace{A(BA)^{-1/2}}^{C} \\ \underbrace{B(AB)^{-1/2}}_{D} & 0 \end{bmatrix}$$

Abbiamo dimostrato che

$$\text{sign}\left(\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & C \\ D & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} C = A(BA)^{-1/2} \\ D = B(AB)^{-1/2} \end{array}$$

Ci manca di dimostrare che $CD = I$

Basta usare

$$I = \left(\text{sign}\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}\right)^2 = \begin{bmatrix} 0 & C \\ D & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} CD & 0 \\ 0 & DC \end{bmatrix}.$$

$$K_{ABS}(f, X) = \| K_{f,X} \|_2 \leq K_2(V) \cdot \max(|\text{autovalori di } K_{f,X}|)$$

$$K_{f,X} = V \cdot \Lambda \cdot V^{-1}, \quad \Lambda = \text{diag}(\text{autovalori di } K_{f,X})$$

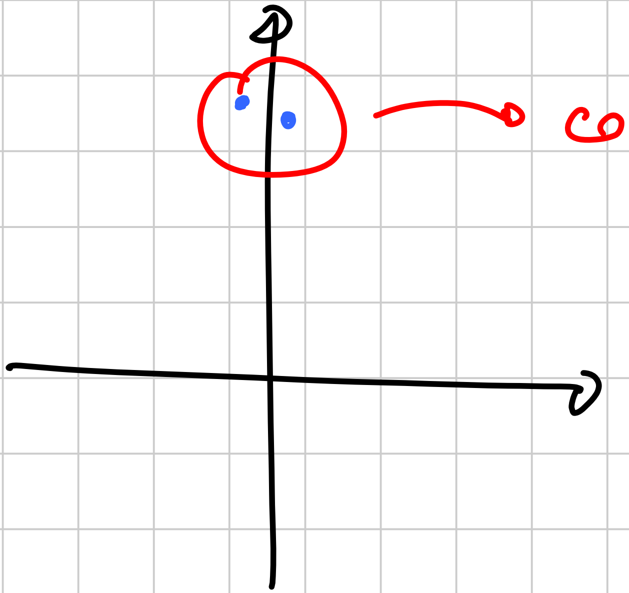
Gli autovalori sono

$$f[\lambda_i, \lambda_j] = \begin{cases} \dfrac{f(\lambda_j) - f(\lambda_i)}{\lambda_j - \lambda_i} & \lambda_i \neq \lambda_j \\ f'(\lambda_i) = 0 & \lambda_i = \lambda_j \end{cases}$$

$$\frac{f(\lambda_j) - f(\lambda_i)}{\lambda_j - \lambda_i} = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda_i, \lambda_j \text{ dello stesso lato dell'asse immaginario} \\ \dfrac{\pm 2}{\lambda_j - \lambda_i} \end{cases}.$$

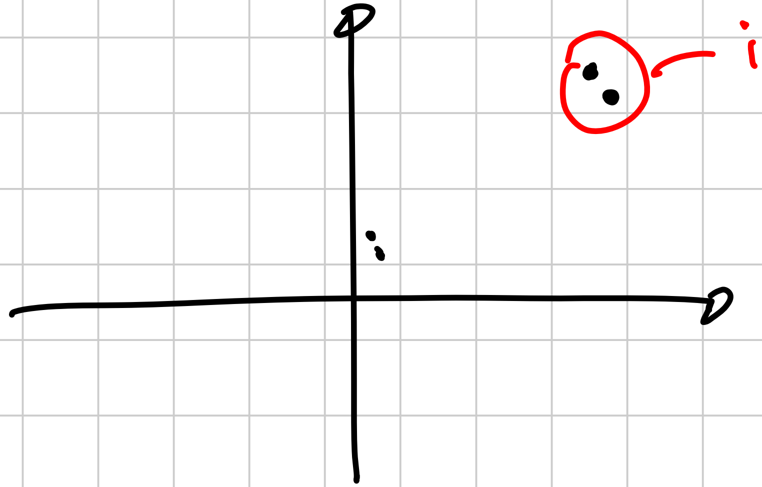
$$\max|\text{autovalore}| = \frac{2}{|\lambda_j - \lambda_i|}$$

dove λ_i, λ_j stanno da parti opposte dell'asse immaginario



condizionamento elevato

(Nota che se tutti gli autoval. stanno dallo stesso lato allora $\mathrm{sign}(A) = \pm I$, costante, quindi $K(f,X) = 0$)



😐 — in realtà non causano problemi anche se causano $k_2(V)$ elevato

---

Teo: $S = \operatorname{sign}(A)$ $\qquad N = (A^2)^{1/2}$ $\qquad$ (quindi $A = SN = NS$)

Allora

$$K_{abs}(\operatorname{sign}, A) = \left\| \left(1 \otimes N + N^T \otimes 1\right)^{-1} \left(I - S^T \otimes S\right) \right\|$$

dim:

Fissiamo una perturbazione E

$S + L = \operatorname{sign}(A+E)$ $\qquad L = L_{\operatorname{sign}, A}(E) + o(\|E\|)$

1) $(S+L)(A+E) = (A+E)(S+L)$ $\qquad$ (uno è una funzione dell'altro)

2) $(S+L)^2 = I$

1) $\cancel{SA} + LA + SE + \cancel{LE} = \cancel{AS} + AL + ES + \cancel{EL}$ $\quad o(\|E\|)$

2) $\cancel{S^2} + \underbrace{SL + LS} + \cancel{L^2} = \cancel{I}$

$$LA - AL = ES - SE$$

$$LNS - SNL = ES - SE$$

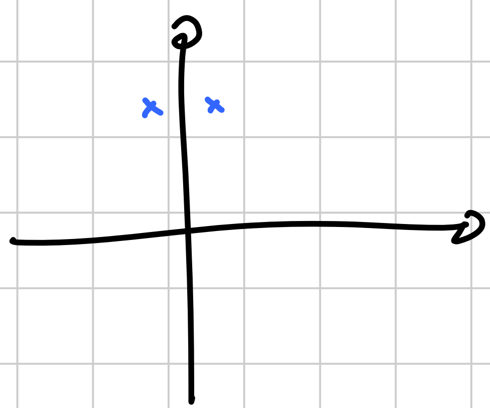
$$(LN + NL)S = ES - SE$$

$$(LN + NL) = E - SES^{-1}$$

$$(1\otimes N + N^T\otimes 1)\,\mathrm{vec}\, L = (1 - S^{-T}\otimes S)\,\mathrm{vec}\, E$$

$$\mathrm{vec}\, L = \underbrace{(1\otimes N + N^T\otimes 1)^{-1}(1 - S^{-T}\otimes S)}_{K_{sign,A}}\,\mathrm{vec}\, E$$

La quantità $\|(1\otimes N + N^T\otimes 1)^{-1}\|$ è quella che avevamo definito $\mathrm{sep}(N,-N)$



Schur-Parlett per il segno di matrici:

1) Calcolo una decomposizione di Schur

$$A = Q \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix} Q^* \quad \text{tale che}$$

$$\operatorname{eig}(T_{11}) \subseteq LHP, \qquad \operatorname{eig}(T_{22}) \subseteq RHP$$

2) $$f\left(\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -I & X \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Impongo commutatività:

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & X \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & X \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -T_{11} & T_{11}X+T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_{11} & -T_{12}+XT_{22} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ X risolve $T_{11}X - XT_{22} = -2\cdot T_{12}$

T_{11}, T_{22} non hanno autoval. in comune (stanno in semipiani diversi) $\Rightarrow$ l'equazione è risolubile

---

L'iterazione $A_0 = A$

$$A_{k+1} = \frac{1}{2}\left(A_k + A_k^{-1}\right)$$

converge a $\mathrm{sign}(A)$ (quadraticamente)