$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \operatorname{Re}(x) > 0 \\ \mathrm{NaN} & \operatorname{Re}(x) = 0 \\ -1 & \operatorname{Re}(x) < 0 \end{cases}$$

(*) $x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{1}{x_k}\right)$ pti fissi: $+1$, -1

è il metodo di Newton su $f(x) = x^2 - 1$:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - 1}{2x_k} = \frac{2x_k^2 - x_k^2 + 1}{2x_k}$$

<u>Teo:</u> l'iterazione $(*)$ converge a -1 se $\mathrm{Re}\, x_0 < 0$, a $+1$ se $\mathrm{Re}\, x_0 > 0$ (cioè, converge a $\mathrm{sgn}(x_0)$ dove è definito)

<u>Dim:</u>

$$y_k := \frac{1+x_k}{1-x_k} = \mathcal{C}(x_k)$$

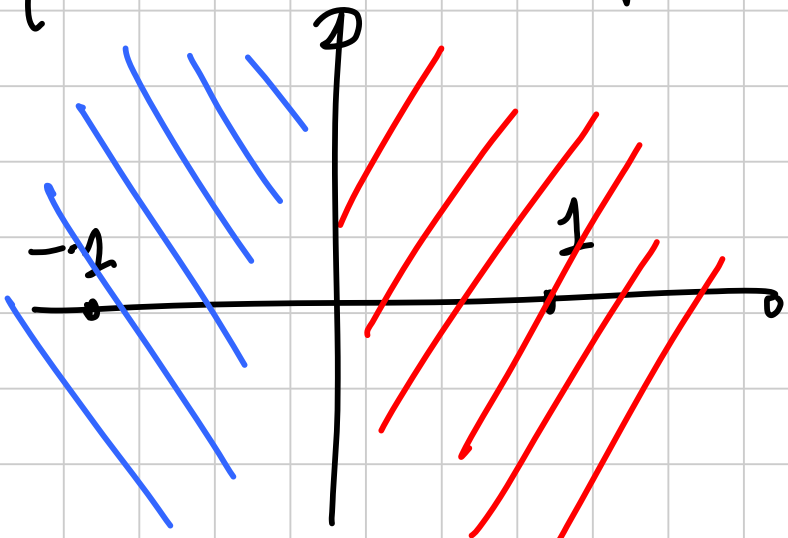
$$y_{k+1} = \frac{1+x_{k+1}}{1-x_{k+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{1}{x_k}\right)\right)x_k \cdot 2}{\left(1-\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{1}{x_k}\right)\right)x_k \cdot 2} = \frac{2x_k+x_k^2+1}{2x_k-x_k^2-1} =$$

$$= -\frac{(1+x_k)^2}{(1-x_k)^2} = -y_k^2$$

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "x \mapsto \frac{1+x}{1-x}"'] & x+\frac{1}{x} \arrow[d, "x \mapsto \frac{1+x}{1-x}"] \\
y \arrow[r, mapsto, "\hat{f}(y) = -y^2"] & -y^2
\end{tikzcd}$$

$$\lim_{k \to \infty} y_k = \begin{cases} 0 & \text{se } |y_0| < 1 \\ \text{non converge} & \text{se } |y_0| = 1 \text{ (tranne } y_0 = -1) \\ \infty & \text{se } |y_0| > 1 \end{cases}$$

$$|y_0| = \frac{|1 + x_0|}{|1 - x_0|} \begin{cases} < 1 & \text{se } x_0 \text{ è più vicino a } 1 \text{ che a } -1 \\ > 1 & \text{se } x_0 \text{ è più vicino a } -1 \text{ che a } 1 \end{cases}$$



$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + x_k^{-1}\right) \quad \text{se } x_0 = VDV^{-1}$$

$$X_1 = V \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n) \end{bmatrix} V^{-1} \qquad f(x) = \frac{1}{2}(x + 1/x)$$

__Teo:__ l'iterazione $X_{k+1} = \frac{1}{2}(X_k + X_k^{-1})$ converge a $S = \text{sgn}(X_0)$ per ogni $X_0 \in \mathbb{C}^{n \times n}$ per cui $\text{sgn}(X_0)$ esiste

$$Y_k = (X_k - S)(X_k + S)^{-1}$$

$$X_k \cdot X_k^{-1}$$

$$Y_{k+1} = (X_{k+1} - S)(X_{k+1} + S)^{-1} = \left[\frac{1}{2}(X_k + X_k^{-1}) - S\right]\left[\frac{1}{2}(X_k + X_k^{-1}) + S\right]^{-1}$$

$$= \left[X_k^2 + S^2 - 2X_k S\right]\left[X_k^2 + S^2 + 2X_k S\right]^{-1} = \qquad (S^2 = I)$$

$$= (X_k - S)^2 (X_k + S)^{-2} = \left[(X_k - S)(X_k + S)^{-1}\right]^2 = Y_k^2$$

Se X_0 ha autovalori λ_i, Y_0 ha autovalori

$$\frac{\lambda_i - \operatorname{sgn}(\lambda_i)}{\lambda_i + \operatorname{sgn}(\lambda_i)} \quad \text{di modulo} < 1.$$

$$Y_1 = Y_0^2, \quad Y_2 = Y_0^4, \quad Y_3 = Y_0^8 \ \dots \quad \to 0$$

Quindi anche $Y_k (X_k + S) = X_k - S$ converge a 0

(perché $X_k + S$ ha norma limitata)

$m-1$ copie $\underbrace{1 \qquad\qquad 1}$ $\quad C$

Spectral scaling: $\left[\, |\lambda_{min}| \qquad 1 \qquad |\lambda_{max}| \,\right]$

Scelo in modo che $|\lambda_{max}| \cdot |\lambda_{min}| = 1$

Norm scaling: uso $\underset{\sigma_1}{\|A\|}$, $\underset{1/\sigma_m}{\|A^{-1}\|}$ $\quad \left[\, \sigma_{min} \qquad 1 \qquad \sigma_{max} \,\right]$

$|\lambda_{min}| \qquad |\lambda_{max}|$

$\frac{1}{c}$ $\quad c \qquad f\left(\frac{1}{c}\right) = f(c)$

$$f_2(z) = \frac{(1+z)^2 + (1-z)^2}{(1+z)^2 - (1-z)^2} = \frac{1+2z+z^2+1-2z+z^2}{1+2z+z^2-(1-2z+z^2)} =$$

$$= \frac{\cancel{2}\cdot(1+z^2)}{\cancel{2}\cdot 2z} = \frac{1+z^2}{2z} = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

$$f_3(z) = \frac{(1+z)^3+(1-z)^3}{(1+z)^3-(1-z)^3} = \frac{3z^2+1}{z^3+3z}$$

dovrebbe avere un pto fisso di ordine 3 in 1 e uno in -1

$\mathcal{C}(x) = \frac{1+x}{1-x}$ "trasformata di Cayley"

è tale che $\begin{cases} \mathcal{C}(RHP) = \text{esterno del cerchio unitario} \\ \mathcal{C}(LHP) = \text{interno del cerchio unitario} \end{cases}$

simile a $\exp(x)$

$$\operatorname{sign}\begin{bmatrix} 0 & A \\ I & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A^{\frac{1}{2}} \\ A^{-\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

Mi vengono date M, N tali che $A = \underset{\sim}{M}^{-1} N$

e voglio calcolare $\mathrm{sgn}(A)$.

Uso l'iterazione NMS (Newton for the matrix sign) $x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + 1/x\right)$

$$X = M_0^{-1} N_0 = M^{-1} N$$

$$X_1 = \frac{1}{2}\left(M^{-1}N + N^{-1}M\right) = \frac{1}{2} M^{-1}\left(N + MN^{-1}M\right)$$

(trovo due matrici tali che $\boxed{MN^{-1} = \hat{M}^{-1}\hat{N}}$)

$$= \frac{1}{2} M^{-1}\left(N + \hat{M}^{-1}\hat{N}M\right) = \frac{1}{2} M^{-1}\hat{M}^{-1}\left(\hat{M}N + \hat{N}M\right)$$

$$= \underbrace{\left(\hat{M}M\right)^{-1}}_{M_1^{-1}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}\left(\hat{M}N + \hat{N}M\right)}_{N_1}$$

$$(M_0, N_0) \to (M_1, N_1) \to (M_2, N_2) \to \dots$$

$$M, N, \hat{M}, \hat{N} \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

$$M N^{-1} = \hat{M}^{-1} \hat{N} \iff \hat{M} M = \hat{N} N$$

$$\begin{bmatrix} \hat{M} & \hat{N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M \\ -N \end{bmatrix} = 0$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{M} & \hat{N} \end{bmatrix}}_{\in\, \mathbb{C}^{n \times 2n}} = \operatorname{Ker}\left(\underbrace{\begin{bmatrix} M \\ -N \end{bmatrix}}_{\in\, \mathbb{C}^{2n \times n}} \right)$$

$$\begin{bmatrix} -M^{-1}N & I \end{bmatrix} M^{-1} \cdot M \begin{bmatrix} I \\ M^{-1}N \end{bmatrix} = 0$$

$$S \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -M^{-1}NM^{-1} & M^{-1} \end{bmatrix}}_{\text{base del kernel}} \cdot \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} = 0$$

base del kernel

ker con rango massimo

es:

$$\begin{bmatrix} M \\ -N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \\ \vdots & \vdots \\ \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -\varepsilon & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\varepsilon \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] = 0$$

è una sorta di "iterazione segno sulle pencil"

$$A = X_0 = \lambda M_0 - N_0 \longrightarrow X_1 = \lambda M_1 - N_1$$

$$\longrightarrow X_2 = \lambda M_2 - N_2$$

$$A + B \,,\quad A \cdot B$$

$$M_A^{-1} N_A \qquad M_B^{-1} N_B$$

$$AX - XB = C$$

$$(I \otimes A - B^T \otimes I) \operatorname{vec} X = \operatorname{vec} C$$

$$\hat{M} \cdot \operatorname{vec} \hat{X} = \operatorname{vec} \hat{C}$$

$$\|\hat{M} - (I \otimes A - B^T \otimes I)\| \lesssim \| I \otimes A - B^T \otimes I \| \cdot O(u)$$

$|1 \otimes \hat{A} - \hat{B}^T \otimes 1|$

costi:

it. segno:

$2n^3 \times$ passo

facile da parallelizzare

$$\begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{bmatrix} = A$$

(Schur)

$\downarrow$

$\underbrace{25n^3 +}_{\text{difficile da parallelizzare}}$

1) Calcolo $L_{11} \cdot U_{11}$

2) Calcolo $L_{21} = A_{21} U_{11}^{-1}$

$U_{12} = L_{11}^{-1} A_{12}$

Schur-Parlett

1) forma di Schur $A = QTQ^*$

(così $f(A) = Q f(T) Q^*$)

2) calcolo el. diagonali di $S = f(T)$

come $s_{ii} = f(t_{ii})$

(T, S triang. superiore)

3) calcolo gli elementi s_{ij} $i \neq j$ tramite

~~delle ricorrenze che derivano da~~ $\cancel{ST - TS = 0}$

~~(denominatori $t_{jj} - t_{ii}$, problemi con autoval. ripetuti)~~

3bis per $f(x) = x^{1/2}$:

calcolo gli el. S_{ij} $i \neq j$ tramite $S^2 = T$

entrata (i,j) del prodotto: $(j > i)$

$$S_{ii} S_{ij} + \underbrace{S_{i,i+1} S_{i+1,j} + \dots + S_{ik} S_{kj} + \dots}_{\text{calcolato ai passi precedenti, se calcolate "una sopradiagonale per volta"}} + S_{ij} S_{jj} = t_{ij}$$

$$S_{ij} = \frac{t_{ij} - \text{roba}}{S_{ii} + S_{jj}}$$

$S_{ii} + S_{jj} = \Lambda_i^{1/2} + \Lambda_j^{1/2}$ non si annulla (nei casi in cui $A^{1/2}$ è definita) ed è piccolo solo quando $A^{1/2}$ è mal condizionata