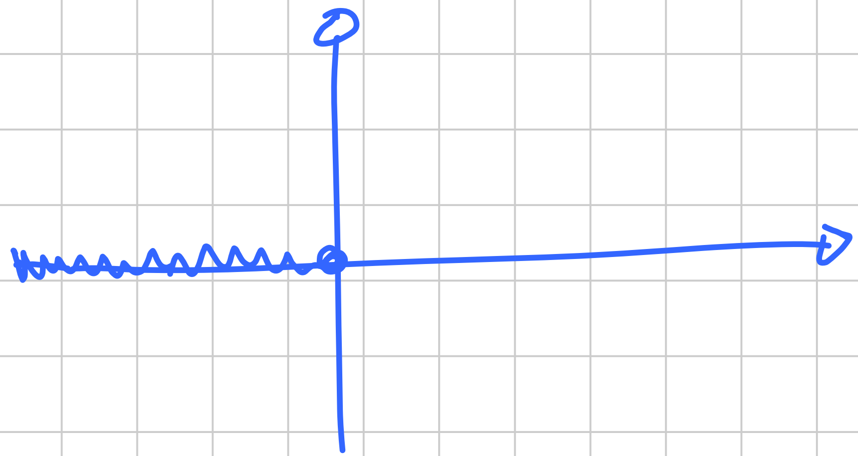
Note Title 4/10/2019



$$L_{f,X} = \left(I \otimes X^{1/2} + (X^{1/2})^T \otimes I \right)^{-1}$$

autovalori $\dfrac{1}{\lambda_i^{1/2} + \lambda_j^{1/2}}$.

(λ_i sono autoval. di X)

1) $QTQ^* = A$, $f(A) = Q f(T) Q^*$

2) el. diagonali di $S = f(T)$ $s_{ii} = f(t_{ii})$

3) $\cancel{ST = TS}$ $S^2 = T$ per ricavare elementi off-diagonal

Produce equazioni del tipo | Standard S-P

$$S_{ij} = \frac{t_{ij} - \text{cose}}{S_{ii} + S_{jj}} \qquad \Bigg| \qquad S_{ij} = \frac{\text{cose}}{t_{jj} - t_{ii}}$$

$i \neq j$

non è mai zero perché $S_{ii} = t_{ii}^{1/2}$ nel RHP

(anche se ho <u>una</u> copia di 0 tra gli autovalori non si annulla)

Incontro problemi con matrici di questo tipo,

$$X = V \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 2 & \\ & & & & 3 \end{bmatrix} V^{-1} \qquad X = QTQ^*, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & * & * & * & * \\ & 0 & * & * & * \\ & & 1 & * & * \\ & & & 2 & * \\ & & & & 3 \end{bmatrix}$$

ma sono comunque matrici per cui $(X+E)^{1/2}$ non esiste per perturbazioni E di norma arbitrariamente piccola.

$$\left[\begin{array}{c|c} S_{11} & S_{12} \\ \hline 0 & S_{22} \end{array}\right] = f(T) \qquad T = \left[\begin{array}{c|c} T_{11} & T_{12} \\ \hline 0 & T_{22} \end{array}\right]$$

$$\boxed{S_{11} S_{12} + S_{12} S_{22} = T_{12}}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \times & \times & \times & \times \\ & 0 & \times & \times & \times & \times \\ & & & \times & \times & \times \\ & & & & \times & \times \\ & & & & & \times \end{bmatrix}$$

Metodo di Newton su $X^2 - A = 0$

Jacobiano della funzione (visto come mappa $\mathbb{C}^{m^2} \to \mathbb{C}^{m^2}$)

= forma di Kronecker della derivata di Fréchet

di $F(X) = X^2 - A$

$$L_{F,X}(E) = XE + EX$$

$$K_{F,X} = I \otimes X + X^T \otimes I$$

$$X_{k+1} = X_k - L_{F,X}^{-1} F(X_k) \qquad x_k = \operatorname{vec} X_k$$

$x_k = x_k - K_{F,X}^{-1}\left(\mathrm{vec}\, F(X_k)\right)$ (Newton tradizionale)

Corrisponde a risolvere un'equazione di Sylvester:

$X_{k+1} = X_k - E_k$ $\quad E_k$ risolve $\quad X_k E_k + E_k X_k = F(X_k)$

---

metodo di Newton per il problema (scalare) $x^2 - a = 0$

è $\quad x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - a}{2x_k}$

Suggerisce l'iterazione

$$X_{k+1} = X_k - (2X_k)^{-1}(X_k^2 - A)$$ (Newton modificato)

(oppure la stessa cosa con il prodotto a dx)

Se prendo X_0 che commuta con A,

allora anche X_1 commuta con A, e così $X_2, X_3, \dots$

E anche la differenza $X_k - X_{k+1} = E_k$ commuta con A

E_k soddisfa $E_k = (2X_k)^{-1}(X_k^2 - A)$

$$\iff \quad 2X_k E_k = X_k^2 - A$$

$$\iff \quad X_k E_k + E_k X_k = X_k^2 - A$$

<u>Th</u>: se X_0 e A commutano, allora il metodo di Newton tradizionale e modificato producono le stesse iterate X_k (almeno in aritmetica esatta)

(E quello modificato costa molto meno)

(In particolare, M.N. converge quadraticamente)

$$X_{k+1} = (2X_k)^{-1}\left(X_k^2 - A\right) = \frac{1}{2}\left(X_k - AX_k^{-1}\right)$$

Premoltiplico per $A^{-1/2}$, uso commutatività:

$$A^{-1/2} X_{k+1} = \frac{1}{2}\left(A^{-1/2}X_k - \left(A^{-1/2}X_k\right)^{-1}\right)$$

è l'iterazione segno su $Y_k = A^{-1/2} X_k$

L'iterazione converge a $\operatorname{sgn}\left(A^{-1/2} X_0\right)$.

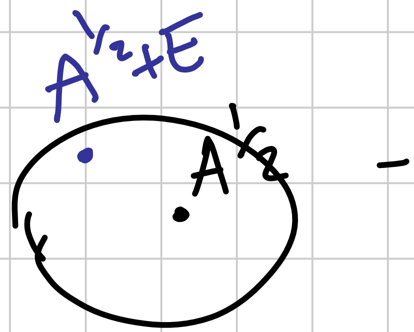
In particolare, se partite da $X_0 = \alpha I$, $\alpha > 0$

allora converge a $\operatorname{sgn}\left(A^{-1/2} \cdot \alpha I\right) = I$

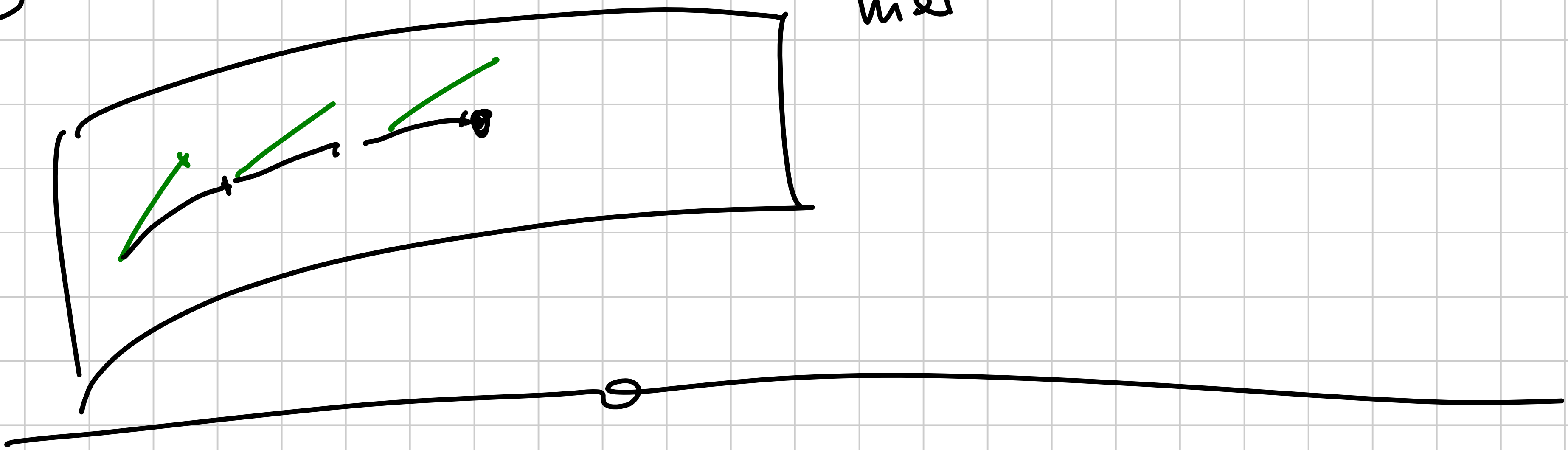
$Y_k \to I \qquad X_k \to A^{1/2}$

$\Rightarrow$ MN (e anche TN) converge alla radice quadrata principale se $X_0 = \alpha I$ (o se $X_0 = \alpha A$).

Possiamo studiare la stabilità di $G(X) = \frac{1}{2}(X + X^{-1}A)$ come sistema dinamico in un intorno del suo punto fisso $X = A^{1/2}$



$\mathbb{C}^{n\times n}$



matrici che commutano con A

<u>Teo</u> (da sistemi dinamici): un punto fisso B di $X_{k+1} = F(X_k)$ è fortemente stabile se gli autovalori di JF (Jacobiano) hanno tutti valore assoluto < 1.

(se $\rho(JF) > 1$ è instabile, se $\rho(JF) = 1$ è più delicato)

$$F(B+E) = B + (JF)\cdot E + o(\|E\|)$$

(L'iterazione corrisponde a moltiplicare per JF, al prim'ordine)

$$F(X) = \frac{1}{2}\left(X + X^{-1}A\right)$$

$$F(X+E) = \frac{1}{2}\left(X + E + (X+E)^{-1}A\right) \approx \frac{1}{2}\left(X + E + X^{-1}A - X^{-1}EX^{-1}A\right)$$

Lemma: la derivata di Fréchet della mappa
$$X \mapsto X^{-1} \quad \text{è} \quad F_X(E) = -X^{-1}EX^{-1}$$

dim: $(X+E)^{-1} = \left[X(I + X^{-1}E)\right]^{-1} =$

$$= (I + X^{-1}E)^{-1} X^{-1} = \left(I - X^{-1}E + (X^{-1}E)^2 - (X^{-1}E)^3 + \dots\right) X^{-1}$$

$$= X^{-1} - X^{-1}EX^{-1} + \underbrace{X^{-1}EX^{-1}EX^{-1} - X^{-1}EX^{-1}EX^{-1}EX^{-1} + \dots}_{o(\|E\|)}$$

$$L_{F,X}(E) = \frac{1}{2}\left(E - X^{-1}EX^{-1}A\right)$$

Nel punto fisso $B = A^{1/2}$, viene

$$L_{F,A^{1/2}}(E) = \frac{1}{2}\left(E - A^{-\frac{1}{2}}EA^{\frac{1}{2}}\right)$$

$\mathrm{vec}(MXN) = (N^T \otimes M)\,\mathrm{vec}\,X$

$$K_{F,A^{1/2}}(E) = \frac{1}{2}\left(I - (A^{\frac{1}{2}})^T \otimes A^{-1/2}\right)$$

che ha autovalori $\frac{1}{2}\left(1-\lambda_i^{1/2}\cdot\lambda_j^{-1/2}\right)$,

dove λ_i sono gli autovalori di A.

Possono essere arbitrariamente lontani da 1, se A è mal condizionata $\Rightarrow$ il punto fisso può essere instabile.

(Nota che l'iterazione segno è il caso speciale $A=I$ di questa iterazione, che è perfettamente stabile ($J_F=0$))

Piccola modifica (DB iteration):

$$X_{k+1}=\frac{1}{2}\left(X_k+X_k^{-1}A\right)$$

$$Y_k := A^{-1} X_k$$

$$\begin{cases} X_{k+1} = \frac{1}{2}\left(X_k + Y_k^{-1}\right) \\ Y_{k+1} = A^{-1}\left(X_{k+1}\right) = A^{-1} \cdot \frac{1}{2}\left(X_k + X_k^{-1} A\right) = \frac{1}{2}\left(Y_k + X_k^{-1}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_{k+1} = \frac{1}{2}\left(X_k + Y_k^{-1}\right) \\ Y_{k+1} = \frac{1}{2}\left(Y_k + X_k^{-1}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} X_0 = A \\ Y_0 = I \end{cases}$$

DENMAN-BEAVERS ITERATION

Converge a $\lim (X_k, Y_k) = \left(A^{1/2}, A^{-1/2}\right)$

È stabile? È una mappa $G : \mathbb{C}^{2m^2} \to \mathbb{C}^{2m^2}$

$$G\left((X,Y)\right) = \left(\frac{1}{2}(X+Y^{-1}),\ \frac{1}{2}(Y+X^{-1})\right)$$

$$JG = \left[\begin{array}{c:c} \frac{1}{2}I & -\frac{1}{2}Y^{-T} \otimes Y^{-1} \\ \hdashline -\frac{1}{2}X^{-T} \otimes X^{-1} & \frac{1}{2}I \end{array}\right]$$

punto fisso $(A^{\frac{1}{2}}, A^{-\frac{1}{2}}) = (X, Y)$

$$JG_{(A^{\frac{1}{2}}, A^{-\frac{1}{2}})} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} I & -A^{\frac{1}{2}T} \otimes A^{\frac{1}{2}} \\ -A^{-\frac{1}{2}T} \otimes A^{-\frac{1}{2}} & I \end{bmatrix}$$

$$JG^2_{(A^{1/2},A^{-1/2})} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} I+I & -A^{1/2\,T}\otimes A^{1/2} - A^{1/2\,T}\otimes A^{1/2} \\ -A^{-1/2\,T}\otimes A^{-1/2} - A^{-1/2\,T}\otimes A^{-1/2} & I+I \end{bmatrix} = JG_{(A^{1/2},A^{-1/2})}$$

$\Rightarrow$ JG è idempotente $\Rightarrow$ ha autovalori 0 e 1.

$\rho(JG=1)$, $\|JG^K\|$ resta limitato

$\Rightarrow$ partendo da un punto della forma $(A^{1/2},A^{-1/2})+(E_1,E_2)$,

$$G^K\left[(A^{1/2},A^{-1/2})+(E_1,E_2)\right] \sim \bar{G}\left[(A^{1/2},A^{-1/2})+(E_1,E_2)\right]+o(\|E_i\|)$$