TEMPO continuo

$\dot{x}(t) = A x(t)$

$A^* X + XA + Q = 0 \quad Q > 0 \quad (L)$

$X = \int_0^\infty \exp(A^* t)\, Q \exp(At)\, dt$

sist. din. stabile $\Leftrightarrow$ eig$(A) \leq$ LHP

$x(t) = \exp(At)\, x_0$

"Energia" $E(x) = x^* X x$

(L) ha soluzione $X > 0 \Leftrightarrow A$ ha eig $\leq$ LHP

$\Leftrightarrow$ sistema stabile

tempo discreto

$x_{k+1} = A x_k$

$X - A^* X A = Q, \quad Q > 0 \quad (S)$

$X = \sum_{k=0}^{\infty} (A^*)^k Q A^k$

sist. stabile $\Leftrightarrow$ eig$(A) \leq$ disco

$x_k = A^k x_0$

"Energia" $E(x) = x^* X x$

(S) ha sol. $X > 0$

$\boxed{\Leftrightarrow}$ eig$(A) \leq$ disco

$\Leftrightarrow$ sist. stabile

$\Leftarrow)$ $\mathrm{eig}(A) \subseteq \text{disco} \Rightarrow X \succ 0$

segue da $X = \sum_{k=0}^{\infty} (A^*)^k Q A^k$, tutti i termini sono $\succ 0$

$\Rightarrow)$ (S) ha sol. $X \succ 0 \Rightarrow \mathrm{eig}(A) \subseteq \text{disco}$

$A v = \lambda v$

$$v^* X v - v^* A^* X A v = v^* Q v$$

$$v^* X v^* (1 - \bar{\lambda} \lambda) = v^* Q v$$

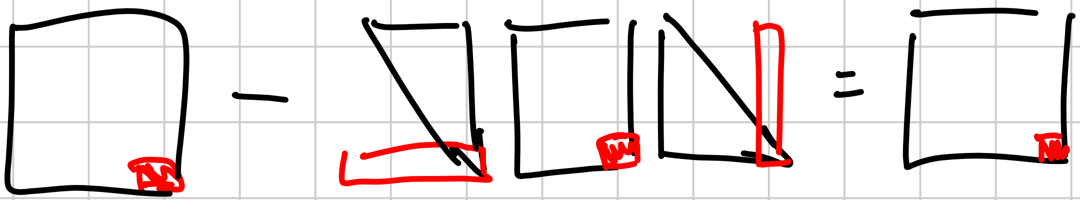
$$\Rightarrow \quad 1 - \bar{\lambda}\lambda = \frac{v^* Q v}{v^* X v} > 0$$

Come si risolve

$$X - A^* X A = Q \ ?$$

Come le Sylvester: cambio base assumendo A triangolare

$$X - T^* X T = \hat{Q}$$



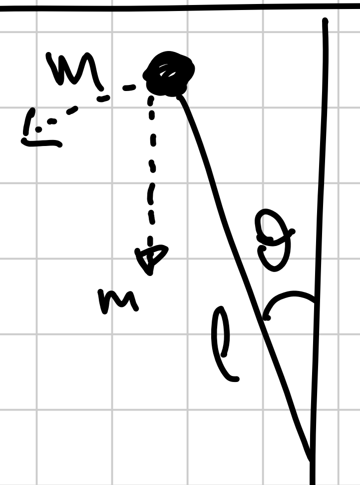
si risolve per sostituzione partendo da $(i,j) = (n,n)$.

(In realtà, con lo stesso metodo si risolvono tutte le equazioni del tipo $AXB + CXD = E$,

prima prendendo fattorizzazioni QZ di (A, C) e di (D^*, B^*) e poi risolvendo l'equazione con coeff. triangolari per sostituzione

$$\nabla \square \Delta + \nabla \square \Delta = \square$$

(Invece, non c'è nulla in giro per risolvere la versione a tre termini $AXB + CXD + EXF = G$ in meno di $O(n^6)$)



variabile del moto ϑ

$$\cancel{m}\,\ddot{\vartheta} = \cancel{m}\frac{g}{l}\sin\vartheta$$

(con soluzione $\vartheta = 0$

$$x = \begin{bmatrix} \vartheta \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} \qquad \dot{x} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \vartheta \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\vartheta} \\ K \cdot \sin\vartheta \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \dot{\vartheta} \\ K \cdot \vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ K & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vartheta \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix}$$

$$= Ax$$

instabile: un autovalore positivo e uno negativo

con $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ K & 0 \end{bmatrix}$ (sisteme libero)

sisteme controllato: aggiungo forza $m u(t)$

$$m\ddot{\vartheta} = \frac{mg}{\ell}\sin\vartheta + m u(t)$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \vartheta \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \dot{\vartheta} \\ K\vartheta + u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ K & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

"feedback control": la forza $u(t)$ è funzione lineare dello stato $x = \begin{bmatrix} \vartheta \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix}$

cioè, $u(t) = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} = f_1 \vartheta + f_2 \dot{\vartheta}$

$$F = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix}$$

A questo punto, l'equazione del sistema è

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix} x(t)}_{u(t)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k+f_1 & f_2 \end{bmatrix} x(t)$$

↳ matrice companion di $\lambda^2 - f_2 \lambda - (k+f_1)$

Posso scegliere arbitrariamente i suoi autovalori cambiando f_1, f_2.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$u(t)$ "controllo" $\in \mathbb{R}^m$

$x(t)$ "stato" $\in \mathbb{R}^n$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\quad B \in \mathbb{R}^{n \times m}$

n grosso,
m a volte piccolo

Vogliamo trovare $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ t.c. il controllo $u(t) = Fx(t)$ rende il sistema stabile, i.e. $A + BF$ ha autovalori in LHP.

Osservazione: nel problema del pendolo, se volete un controllo che sia solo una funzione di $\theta(t)$, non di $\dot{\theta}(t)$

$$u(t) = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ K & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

$$A+BF = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ K+f_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nessuna scelta di f_1 mi produce autovalori entrambi con parte reale negativa (sono o uno positivo e uno negativo o tutti e due immaginari puri)

Dati A, B, riesco sempre a trovare F t.c. $A+BF$ ha autovalori arbitrari, o perlomeno in LHP?

Ci sono casi in cui il problema sicuramente non è risolubile, ad es.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$A+BF = \begin{bmatrix} A_{11}+B_1F_1 & A_{12}+B_1F_2 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

tutte queste matrici hanno come autovalori gli autoval. di A_{22}, e se $eig(A_{22}) \notin LHP$ il sistema non sarà mai stabile.

Alternativamente:
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u \\ \dot{x}_2 = A_{22}x_2 \end{cases},$$

e il comportamento di x_2 è fissato indipendentemente da $u(t)$

e analogamente se $A = K^{-1}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} K$, $B = K^{-1}\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$

con $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibile

$$\dot{x}(t) = K^{-1}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} K x(t) + K^{-1}\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$K\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} K x(t) + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

ponendo $y = Kx(t)$ sono di nuovo nel caso precedente.

Test per controllare questa condizione: basato su spazi di Krylov.

Def: $K(A,B) = \mathrm{span}\left(B, AB, A^2B, A^3B, \dots\right)$

Diciamo che la coppia (A,B) è **controllabile** se $K(A,B) = \mathbb{R}^n$

Lemma: (A,B) controllabile $\iff$ non esiste K invertibile t.c.

$$A = K^{-1}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} K, \quad B = K^{-1}\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$ (con il secondo blocco non banale) $(*)$

Dim: $\Rightarrow$): dimostro che se esiste K t.c. le equazioni valgono, **allora** (A,B) non è controllabile.

$$A^h = K^{-1}\begin{bmatrix} A_{11}^h & * \\ 0 & A_{22}^h \end{bmatrix} K, \quad \text{quindi} \quad A^h B = K^{-1}\begin{bmatrix} A_{11}^h B_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e in particolare sta nello span delle prime colonne di K^{-1}

$\Rightarrow$ non è $\mathbb{R}^n$

$\Leftarrow$ se $K(A,B) \neq \mathbb{R}^n$, allora esiste la scomposizione $(*)$

Sia M_1 base di $K(A,B)$, e $[M_1\ M_2]$ un completamento a una base di $\mathbb{R}^n$ (quindi $[M_1\ M_2]$ è quadrata invertibile)

$B \subseteq K(A,B)$, quindi $B = [M_1\ M_2] \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(comb. lineare delle colonne di M_1)

In più, $K(A,B)$ è uno spazio invariante per A:

se prendo un vettore v in $K(A,B)$

$$v = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i A^{h_i} B e_{j_i} \Rightarrow Av = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i A^{h_i+1} B e_{j_i} \in K(A,B)$$

$$A \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$$

$AM_1 = M_1 \cdot \text{qualcosa}$

$AM_2 = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \cdot \text{qualcosa}$

$$A = M \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} M^{-1}$$

Remark: $K(A,B) = \operatorname{span} \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots \end{bmatrix} =$

$= \operatorname{span} \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$

$$A^n = \alpha_{n-1} A^{n-1} + \alpha_{n-2} A^{n-2} + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 I$$

$$A^n B = \left(\alpha_{n-1} A^{n-1} + \dots + \alpha_0 I\right) B$$

Abbiamo costruito una decomposizione

$$A = M \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} M^{-1} \qquad B = M \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M = [M_1 \;\; M_2] \qquad M_1 \text{ base di } K(A, B)$$

$$= \operatorname{span}\left(M_1 \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, M_1 \begin{bmatrix} A_{11} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, M_1 \begin{bmatrix} A_{11}^2 B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots \right) =$$

$$= M_1 \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_{11} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_{11}^2 B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots \right)$$

e perché M_1 sia una base di questo spazio è necessario che

$$\operatorname{span}(B_1, A_{11}B_1, \dots) = \mathbb{R}^{\operatorname{size}(A_{11},1)}.$$

<u>Lemma</u>: $\operatorname{eig}(A) \subseteq LHP$ ("A stabile"). Allora, (A,B) controllabile $\Leftrightarrow$

$$AX + XA^* + BB^* = 0 \text{ ha una soluzione } X \succ 0$$

(Notare che già sappiamo che $X \succcurlyeq 0$, perché $Q = BB^* \succcurlyeq 0$)

$$\left(X = \int_0^\infty \underbrace{\exp(At) BB^* \exp(A^*t)}_{\succcurlyeq 0} \, dt \right)$$

$\Leftarrow$): se esiste M t.c. $M^{-1}AM = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$, $M^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$, allora la soluzione <u>non</u> è pos. definita.

Mostro che se X_{11} risolve $A_{11}X_{11}+X_{11}A_{11}^*=B_1B_1^*$, allora

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11}^* & 0 \\ A_{12}^* & A_{22}^* \end{bmatrix}}_{=} = \begin{bmatrix} B_1B_1^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11}X_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} X_{11}A_{11}^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_1B_1^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{M\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}M^{-1}}_{A}\underbrace{M\begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}M^*}_{X}+\underbrace{M\begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}M^*}_{X}\underbrace{M^{-*}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}^*M^*}_{A^*}=\underbrace{M\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1^* & 0 \end{bmatrix}M^*}_{BB^*}$$

Quindi la soluzione (unica!) di questa eq. di Lyapunov non è $\succ 0$

$\Rightarrow)$: se (A,B) controllabile, allora per ogni $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ succede che $v^* A^k B \neq 0$ per almeno un k.

(se non fosse così, $v^* K(A,B) = 0$, quindi $K(A,B)$ non è tutto $\mathbb{R}^n$, $K(A,B) \subseteq v^\perp$

$\boxed{\Rightarrow}$ $v^* \exp(At) B \neq 0$ per almeno un t

$\Rightarrow$ per continuità, $v^* \exp(At) B \neq 0$ su tutto un intervallo,

quindi $v^* X v = \displaystyle\int_0^\infty (v^* \exp(At) B)(B^* \exp(A^* t) v)\, dt \neq 0$

Manca da dimostrare: se $v^* A^k B$ non è costante 0 per tutti i k, allora $v^* \exp(At) B$ non è costante zero per tutti i t

Controinversa: se $v^* \exp(At) B = 0 \quad \forall t$,

allora $v^* A^k B = 0$ per ogni k

<u>k=0</u>: poniamo $t=0$, $v^* B = 0$

<u>k=1</u>: $$v^* A B = \lim_{t \to 0} \left(\frac{\exp(At) - I}{t} \right) B = 0$$

$$\exp(At) = I + At + \frac{1}{2} A^2 t^2 + \frac{1}{6} A^3 t^3 + \dots$$

<u>k=2</u>: $$v^* A^2 B = \lim_{t \to 0} \left(\frac{\exp(At) - I - tA}{t^2} \right) B = 0$$

$\vdots \qquad \vdots$