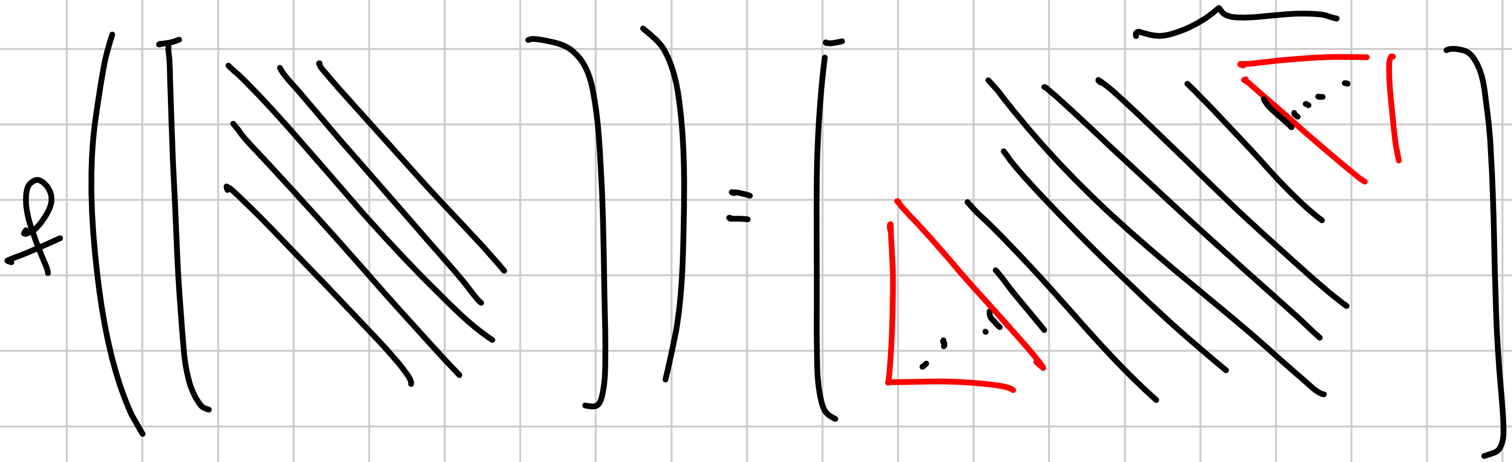


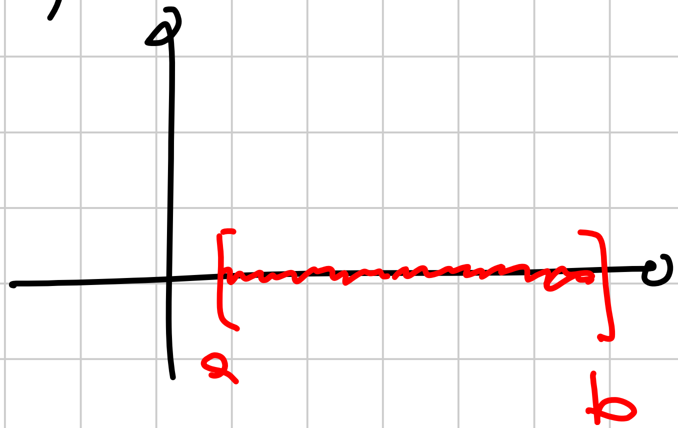
$f(A)b$

- rimpiazzo f con un'approssimante polinomiale in una regione in cui so trovarsi gli autovalori

<u>ex</u> $\exp(A)b$, A simmetrica

Trovo (ad es. metodo delle potenze) un intervallo $[a,b]$ t.c.

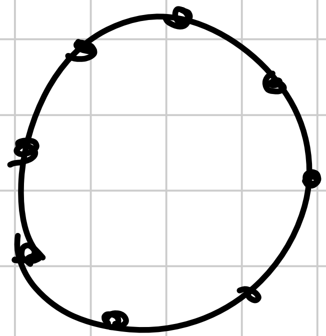
$$[\lambda_{min}, \lambda_{max}] \subseteq [a,b]$$



rimpiazzo $\exp(A)$ con un polinomio che la approssima su $[a,b]$

- Integrali complessi: $f(A)b = \left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(t)(A-tI)^{-1}\,dt\right)b$

$$\approx \frac{1}{2\pi i}\sum_k w_k f(x_k)\underbrace{(A-x_kI)^{-1}b}$$



Arnoldi: costruire una base ortonormale di

$$K_k(A,b) = \text{span}(b, Ab, A^2b, \dots A^{k-1}b)$$

Ad ogni passo, prendete

$$w = \alpha_0 b + \alpha_1 Ab + \dots + \alpha_{k-1} A^{k-1} b \qquad \alpha_{k-1} \neq 0$$

supponete di avere dal passo precedente $(q_1, q_2, \dots q_{k-1})$

t.c. $\text{span} = K_{k-1}(A,b)$

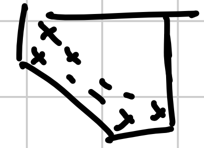
ortogonalizzate w rispetto ai q_i

$$z = w - q_1 q_1^T w - q_2 q_2^T w - \dots - q_{k-1} q_{k-1}^T w$$

$$q_{k+1} = \frac{z}{\|z\|}$$

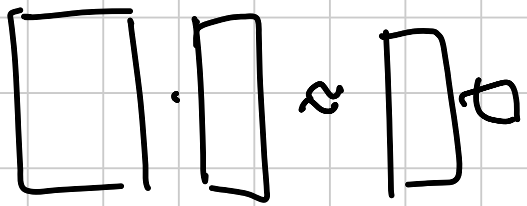
Arnoldi fino a dim. massima: $A = QHQ^*$

Q ortogonale, H Hessenberg

= 

$$A \underset{\in\, \mathbb{C}^{n\times k}}{\begin{bmatrix} Q_k \end{bmatrix}} = \underset{\in\, \mathbb{C}^{n\times k}}{Q_k} \cdot \underset{\substack{\in\, \mathbb{C}^{k\times k} \\ \text{Hessenberg}}}{\begin{bmatrix} H_k \end{bmatrix}} + q_{k+1} h_{k+1,k} e_k^T$$

$$A Q_k \approx Q_k H_k$$



Arnoldi calcola l'azione di A esattamente su polinomi di grado $\leq k-1$:

$$K_k(A,b) = \operatorname{span}(b, Ab, \dots A^{k-1}b) = \{ p(A)b : p \text{ poly. di grado} < k \}$$

Se $v \in K_k(A, b)$, allora $v = Q_k \cdot w$ per la Q_k vista prima, e

$$\underbrace{Av = AQ_k w = Q_k H_k w + q_{k+1} h_{k+1,k}\,{}^T}_{0};$$

$$\boxed{p(A)b = Q_k p(H_k) e_1 \cdot \|b\|} \quad \forall p \text{ di grado } < k$$

$$\alpha_0 b + \alpha_1 Ab + \dots + \alpha_{k-1} A^{k-1} b \in \text{spazio di Krylov}$$

lo dimostro per le potenze $A^h \cdot b$

$$b = Q_k e_1 \cdot \|b\|$$

Ab $\quad Ab = A \cdot Q_k \cdot e_1 \cdot \|b\| = Q_k H_k \cdot e_1 \cdot \|b\|$

$(e_k^T e_1 = 0)$

$$A^2 b = A \cdot Ab = A\, Q_k H_k e_1 \|b\| = Q_k H_k^2 e_1 \|b\|$$

$\vdots$

$$(e_k \cdot H_k e_1 = 0)$$

Posso approssimare $f(A)b \approx Q_k f(H_k) e_1 \cdot \|b\|$

(è esatta sui polinomi di grado $< k$)

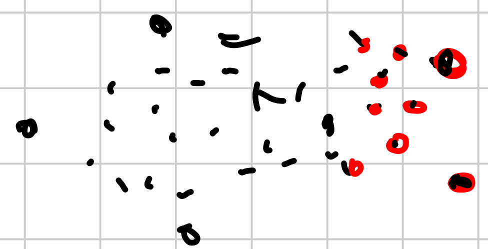
$f(H_k) = p(H_k)$, dove p è il polinomio che interpola f sullo spettro di $H_k \in \mathbb{C}^{k \times k}$ (di grado $< k$)

$$f(A)b \approx Q_k f(H_k) e_1 \cdot \|b\| = Q_k p(H_k) e_1 \|b\| = p(A)b$$

Cioè, $f(A)b \approx p(A)b$, dove p è il polinomio di interpolazione di f sugli autovalori di H_k (valori di Ritz di A)

Si sa (da convergenza di Arnoldi) che i valori di Ritz approssimano gli autovalori estremali di A

<u>ES</u>: esponenziale: i λ_i per cui $\exp(\lambda_i)$ ha valore assoluto maggiore sono quelli estremali "a destra dello spettro"



$$f(A) = V \begin{bmatrix} \exp(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \exp(\lambda_n) \end{bmatrix} V^{-1} \approx V \begin{bmatrix} p(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & p(\lambda_n) \end{bmatrix} V^{-1}$$

Approssim. polinomiale accurata se approssima bene i λ_i

che stanno più a destra nel piano complesso.

Un'approssimazione di tipo Arnoldi "funziona bene"

$f(\lambda_i) \approx p(\lambda_i)$ sui λ_i estremali, quindi anche su quelli di interesse per l'esponenziale.

Se invece ho una funzione t.c. i valori maggiori (in modulo) sono assunti da autovalori λ_i interni allo spettro di A, allora $f(A)b \approx Q_k f(H_k) e_1 \|b\|$ funziona male

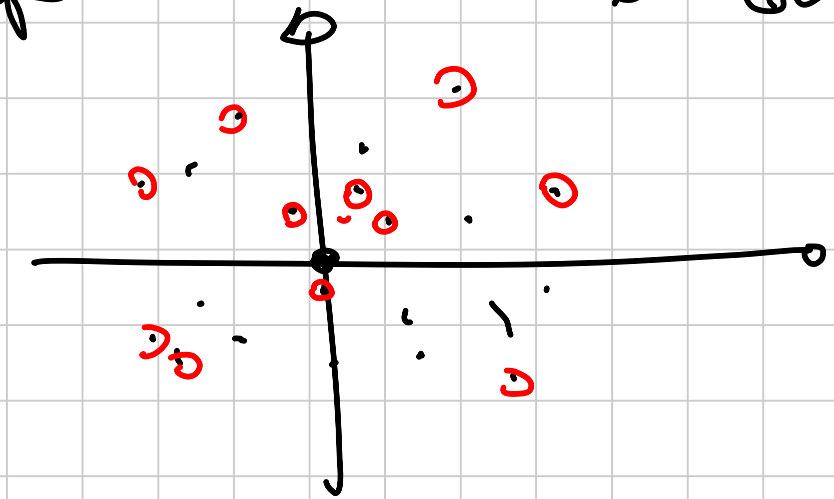
---

Extended Krylov subspaces:

$$\text{span}\left(A^{-h}b, \dots A^{-2}b, A^{-1}b, b, Ab, A^2b, \dots A^{k-1}b\right) =$$

$$= \left\{ r(A)b \; : \; r(x) = \frac{p(x)}{x^h} \quad \deg p \le k+h \right\}$$

Vengono costruiti con ricorrente tipo-Arnoldi; l'unica cosa che cambia è che ad ogni passo invece di prendere $w = A q_{k-1}$ se devo aggiungere una potenza negativa di A prendo $A^{-1} \cdot q_i$, q_i scelto opportunamente tra le colonne di Q_{k-1}



Terza variante: Arnoldi razionale / spazi di Krylov razionali:

costruiscono lo spazio

$$v = \alpha_1 (A - \lambda_1 I)^{-1} b + \alpha_2 (A - \lambda_2 I)^{-1} b + \dots + \alpha_k (A - \lambda_k I)^{-1} b$$

per $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k \in \mathbb{C}$ complessi fissati

viene costruito di nuovo con un'iterazione tipo-Arnoldi

$$w = (A - \lambda_k I)^{-1} q_i \qquad i \text{ colonna opportuna di } Q_{k-1}$$

Ad ogni passo, invece che una moltiplicazione $A q_i$ avete la soluzione di un sistema $(A - \lambda_k I)^{-1} q_i$

Gli elementi v di questo spazio sono vettori che si scrivono come $r(A) b$, dove

$$r(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \frac{1}{x-\lambda_i}$$, al variare di $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k$

$$= \frac{p(x)}{(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_k)}$$, $p(x)$ di grado $< k$

Controesempio: Arnoldi non trova autovalori fino all'ultima iterazione

$$A = \begin{bmatrix} & & & & & x \\ 1 & & & & & x \\ & \ddots & & & & x \\ & & \ddots & & & x \\ & & & \ddots & & x \\ & & & & 1 & x \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$q_1 = e_1 \quad q_2 = e_2 \quad q_3 = e_3 \quad \cdots \quad e_{k-1}, \dots$

$$A Q_K R_K = Q_K S_K + \text{resto} \quad \text{o} \quad A Q_K \approx Q_K \boxed{S_K R_K^{-1}}$$

$$\boxed{A}\,[\ ]\,\boxed{R_k} = [\ ]\,\boxed{S_k} + \text{resto}$$

$$Q = [q_1, q_2\ q_3]$$

es: supponiamo di avere base di $\text{span}\langle b, Ab, A^2b\rangle$

vogliamo estenderla a base di $\langle A^{-1}b, b, Ab, A^2b\rangle$

Prendiamo $v = \alpha_1 b + \alpha_2 Ab + \alpha_3 A^2 b \quad \alpha_1 \neq 0$

$$w = A^{-1}v = A^{-1}(\alpha_1 b + \alpha^2 Ab + \alpha_3 A^2 b) \quad \alpha_1 \neq 0$$

ortogonalizzando w rispetto a q_1, q_2, q_3 rimane

$$\alpha_1 A^{-1}b - \beta_1 q_1 - \beta_2 q_2 - \beta_3 q_3 = \beta_4 q_4$$

nuovo vettore di base

$$\alpha_1 b - \beta_1 A q_1 - \beta_2 A q_2 - \beta_3 A q_3 = \beta_4 A q_4$$

$$A \begin{bmatrix} Q_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} = Q_4 \cdot \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1}{\|b\|} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \beta_1 \\ & 1 & & \beta_2 \\ 0 & 0 & & \beta_3 \\ 0 & 0 & & \beta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \times & \times & \alpha_1/\|b\| \\ \times & \times & 0 \\ 0 & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

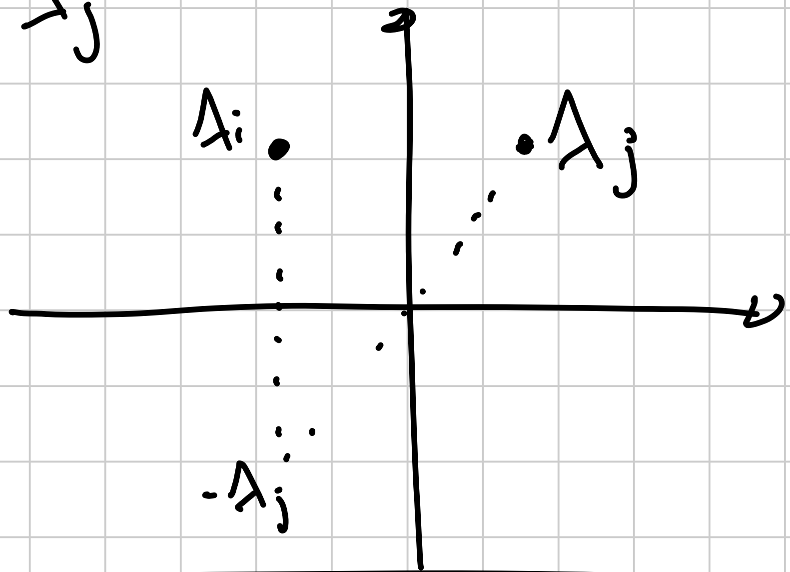
R $\qquad\qquad$ S

$$A^*X + XA + Q = 0 \qquad (L)$$

ha una sol. unica $\iff$ A^* e $-A$ non hanno autovalori in comune

$\iff$ non esistono due autovalori λ_i, λ_j di A tali che $\bar{\lambda}_i = -\lambda_j$

$\iff$ A non ha una coppia di autovalori simmetrici rispetto all'asse immaginario



Lemma: se (L) ha una soluzione X unica, X è

Hermitiana.

__dim:__ se $A^*X + XA + Q = 0$, allora trasponendo e coniugando

$X^*A + A^*X^* + Q = 0$, che dice che X^* risolve

la stessa equazione $\Rightarrow X = X^*$

__Lemma:__ se A ha tutti gli autoval. nel semipiano sinistro $(\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0)$, allora

$$X = \int_0^\infty \exp(A^*\tau)\, Q \exp(A\tau)\, d\tau$$

(l'integrale converge perché $\exp(A\tau) \to 0$ esponenzialmente quando $\tau \to \infty$ perché $eig(A) \subseteq LHP$)

<u>dim</u>: $\frac{d}{d\tau} \int_0^\infty \exp(A^*\tau) Q \exp(A\tau)\, d\tau$

1 $$= \left[\exp(A^*\tau) Q \exp(A\tau)\right]_0^\infty = 0 - Q$$

2 $$\int_0^\infty \frac{d}{d\tau} \exp(A^*\tau) Q \exp(A\tau)\, d\tau$$

$$= \int_0^\infty \left(A^* \exp(A^*\tau) Q \exp(A\tau) + \exp(A^*\tau) Q \exp(A\tau) A\right) d\tau$$

$$= A^* \int_0^\infty \exp(A^*\tau) Q \exp(A\tau)\, d\tau + \int \exp(A^*\tau) Q \exp(A\tau)\, d\tau \cdot A$$

$$① = ② \Rightarrow A^* X + XA = -Q \qquad \square$$

__Lemma__: se $Q \succcurlyeq 0$, allora $X \succcurlyeq 0$ (e A ha autoval. nel LHP)

(__dim__: segue da $X = \int_0^\infty \underbrace{\exp(A^*\tau) Q \exp(A\tau)}_{\succcurlyeq 0} d\tau$)

e se $Q \succ 0$, allora $X \succ 0$, analogamente.

__Lemma__: se $Q \succ 0$, $X \succ 0$, allora A ha tutti gli autoval. nel semipiano sinistro dim:

$$A^*X + XA + Q = 0$$

$$Av = \lambda v$$

$$\underbrace{v^*A^*}X v + v^* X \underbrace{A v} + v^* Q v = 0$$

$$(\bar{\lambda} + \lambda)\, v^* X v = - v^* Q v$$

$$2\mathrm{Re}(\lambda) = \bar{\lambda} + \lambda = \frac{-v^* Q v}{v^* X v} < 0$$

Stesso lemma ridetto: se $\exists\ X > 0$ t.c. $A^*X + XA < 0$, allora $\mathrm{eig}(A) \subseteq LHP$

Come lo vedeva Lyapunov:

Considera il sistema dinamico $\dot{x} = Ax$;

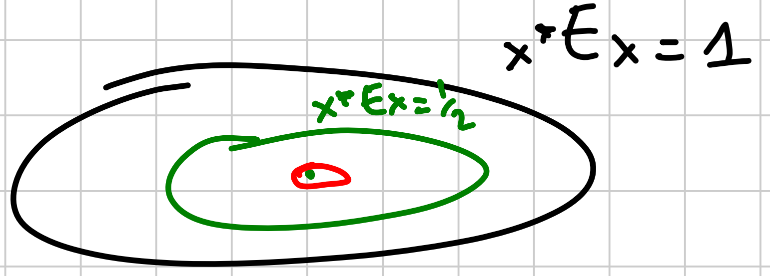
vogliamo dimostrare che è stabile per tutti i val. iniziali (cioè, $\lim_{t\to\infty} x(t)=0$) se e solo se $\exists X>0$ t.c. $A^*X+XA<0$.

Dim. di Lyapunov: consideriamo la "funzione energia" del sistema $E(x)=x^*Xx$.

$$\frac{d}{dt}E(x(t))=\frac{d}{dt}x^*(t)Xx(t)=\dot{x}^*Xx+x^*X\dot{x}=x^*A^*Xx+x^*XAx$$

$=x^*(A^*X+XA)x<0 \Rightarrow$ la funzione energia decresce strettamente nel tempo

$\Rightarrow E(x)\to 0 \quad \Rightarrow \quad x\to 0$



Equazione di Stein:

$$X - A^* X A = Q \quad , \quad Q = Q^* > 0$$

Vale che: A ha tutti gli autovalori nel disco unitario $(|\lambda| < 1)$ se e solo se $X > 0$

Collegata alla stabilità di $x_{k+1} = A x_k$

$$E(x) = x^T X x$$

Cambiamento di energia

$$E(x_{k+1}) - E(x_k) = x_{k+1}^* X x_{k+1} - x_k^* X x_k$$

$$= x_k^* A^* X A x_k - x_k^* X x_k = -x_k Q x_k < 0$$

Soluzione dell'eq. di Stein:

$$X = Q + A^* Q A + (A^*)^2 Q A^2 + (A^*)^3 Q A^3 + \dots$$

$$= \sum_i (A^*)^k Q A^k$$

<u>Lemma</u>: $\operatorname{eig}(A) \subseteq$ disco $\Rightarrow$ $X \succ 0$ quando $Q \succ 0$

<u>Proof</u>: con la formula

<u>Lemma opposto</u>: $X \preceq 0$ quando $Q \succ 0$ $\Rightarrow$ $\operatorname{eig}(H) \subseteq$ disco

$$Av = \lambda v$$

$$v^* X v - v^* A^* X A v = v^* Q v$$

$$v^* X v - v^* \bar{\lambda} X \lambda v = v^* Q v$$

$$\left(1 - \bar{\lambda}\lambda\right) = \frac{v^* Q v}{v^* X v} < 0$$