Teo: (A,B) controllabile $\iff \operatorname{rank}\,[\underset{n}{sI-A}\quad \underset{m}{B}]^{n} = n \quad \forall s \in \mathbb{C}$

"Popov test"

$\operatorname{rank}\,[sI-A \quad B] = n$ automaticamente quando $s \notin \operatorname{eig}(A)$

Unico caso interessante: $s \in \operatorname{eig}(A)$

$u^* A = u^* \lambda$

$$u^*[sI-A \quad B] = 0 \iff u^*(\underset{\underset{u^* \text{ autovett. sinistro}}{\Updownarrow}}{sI-A}) = 0 \quad , \quad u^* B = 0$$

$\operatorname{rank}\,[sI-A, B] = n \quad \forall s \in \mathbb{C} \iff u^* B \neq 0$ per ogni autovett. sinistro u^* di A

se esiste un autoval. sinistro di A u^* t.c. $u^*B = 0$, allora prendo una base M che abbia u come ultima colonna, e ottengo

$$M^{-1}AM = \left[\begin{array}{ccc|c} & * & & * \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{array}\right] \qquad M^{-1}B = \left[\begin{array}{c} * \\ \vdots \\ * \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

se esiste una decomp. $M^{-1}AM = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{12} \end{bmatrix}$ $M^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Prendo $u^* = [0 \quad w^*]M$, $w^* A_{22} = \lambda w^*$

e ho $w^* B = 0$, $u^* A = u^* \lambda$.

Algoritmo di Bass: dato (A, B) controllabile, calcolo F t.c. $\mathrm{eig}(A+BF) \subseteq LHP$

1) scelgo $\alpha > \rho(A) \Rightarrow \operatorname{eig}(A+\alpha I) \subseteq RHP$

$\operatorname{eig}(-A-\alpha I) \subseteq LHP$

2) risolvo $(A+\alpha I)X + X(A+\alpha I)^* = 2BB^*$

Allora, $X \succ 0$ perché $(-A-\alpha I, B)$ controllabile

perché $K(A,B) = K(-A-\alpha I, B)$

3) $\operatorname{eig}(A-BB^*X^{-1}) \subseteq LHP$, quindi $F = -B^*X$ funziona

Infatti,

$$(A-BB^*X^{-1})\underset{\succ 0}{X} + X(A-BB^*X^{-1})^* \underbrace{+2\alpha X}_{\succ 0} = 0$$

E per l'altra freccia del teorema di positiva definitezza della sol. dell'equazione di Lyapunov, ricavo che $\text{eig}(A - BB^* X^{-1}) \subseteq LHP$.

$$\text{eig}(A+BF) \subseteq LHP$$

Kalman decomposition: per ogni (A,B), esiste una M t.c.

$$M^{-1}AM = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \qquad M^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e (A_{11}, B) controllabile (il secondo blocco potrebbe essere 0×0 se (A,B) è già controllabile)

<u>Proof</u>: prendi $M_1 = \text{span}\, K(A,B)$ e completalo a una base

Se $\text{eig}(A_{22}) \subseteq LHP$, allora riesco a stabilizzare il sistema con uno stabilizing feedback F di (A_{11}, B_1):

$$M^{-1}AM + M^{-1}BFM^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}+B_1F & A_{12}+B_1F \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

Coppie (A,B) tali che $\text{eig}(A_{22}) \subseteq LHP$ si dicono <u>stabilizzabili</u>

È ben posto anche se M non è unica, perché $\text{eig}(A_{11}) = \text{eig}\left(A\big|_{K(A,B)}\right)$, $\text{eig}(A_{22}) =$ gli altri autovalori di A.

<u>Lemma</u>: (A,B) stabilizzabile $\Leftrightarrow$ $\text{rk}\begin{bmatrix} sI-A & B \end{bmatrix} = n$

per ogni $s \notin LHP$

Dim: si fa come l'altra dimostrazione

condizione a destra $\Leftrightarrow$ $u^* B \neq 0$ per ogni autovalore sinistro di A con autovalore $\lambda \notin LHP$

$\Leftrightarrow$ non esiste una decomp. $M^{-1}AM = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$, $M^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$

in cui $\text{eig}(A_{22}) \notin LHP$. □

$$E = \int_0^\infty \left(x^* Q x + u^* R u \right) dt$$

s.t. $\dot{x} = Ax + Bu \quad \forall t \in [0, \infty)$

$$L(x,\mu) = \int_0^\infty (x^* Q x + u^* R u)\,dt + \int_0^\infty \mu(t)(\dot{x} - Ax - Bu)\,dt$$

ottimalità quando $\frac{d}{dx}L$, $\frac{d}{d\mu} L = 0$.

polinomio pari: $a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots \iff p(-x) = p(x)$

polinomio dispari: $a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \dots \iff p(-x) = -p(x)$

Per complessi:

$$\overline{p(-x)} = p(x) \iff \overline{a_0} = a_0,\ -\overline{a_1} = a_1,\ \overline{a_2} = a_2,\ -\overline{a_3} = a_3 \dots$$

$$\iff a_{2i} \text{ reali},\ a_{2i+1} \text{ immaginari}$$

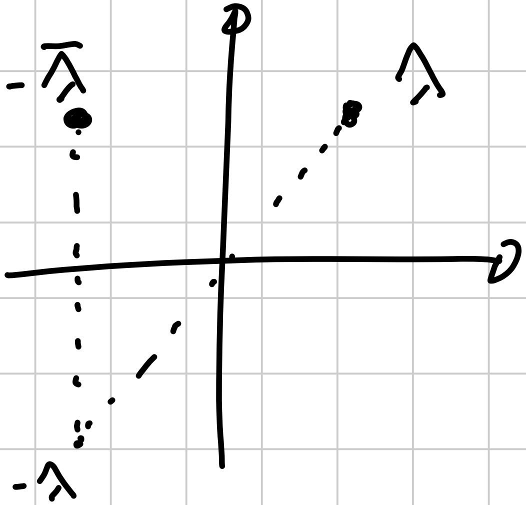
Per matrici:

$$p(-x)^* = p(x) \iff A_{2i}^* = A_{2i} \qquad -A_{2i+1}^* = A_{2i+1}$$

def: $A-\lambda\mathcal{E}$ pari se $A=A^*$, $\mathcal{E}=-\mathcal{E}^*$

Lemma: se λ è autovalore di una pencil pari $A-\lambda\mathcal{E}$, allora anche $-\bar{\lambda}$ lo è

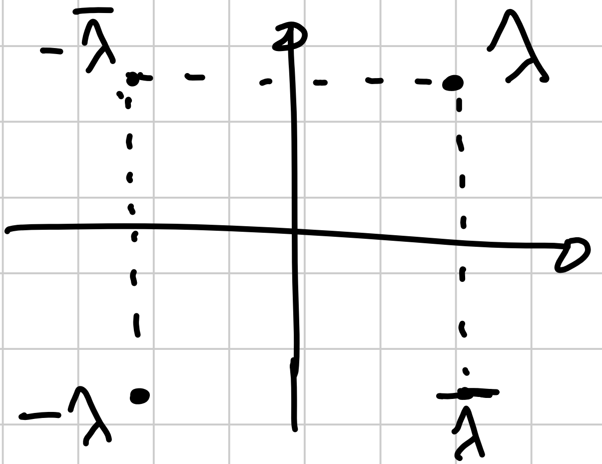
($-\bar{\lambda}$ = simmetrico di λ rispetto all'asse immag.)



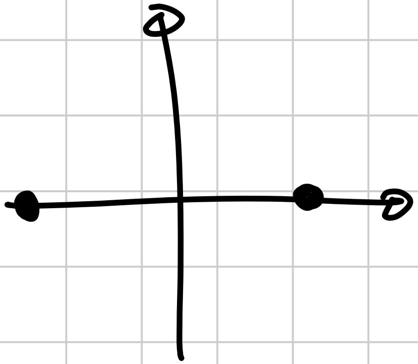
Dim: $(A-\lambda\mathcal{E})x=0$

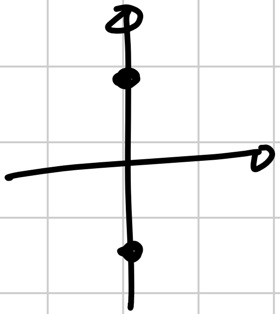
$\Leftrightarrow 0=x^*(A^*-\bar{\lambda}\mathcal{E}^*)=x^*(A+\bar{\lambda}\mathcal{E}) \Leftrightarrow A+\bar{\lambda}\mathcal{E}$ singolare

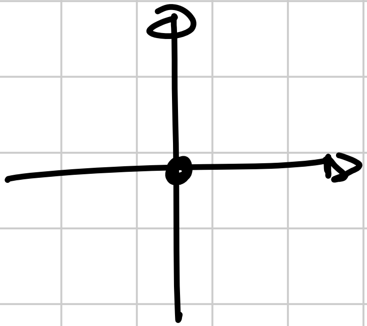
Se in più $A,\mathcal{E}\in\mathbb{R}^{N\times N}$, allora è simmetrico anche rispetto all'asse reale,

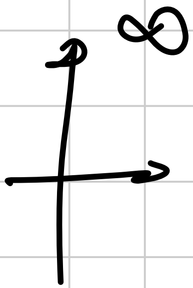


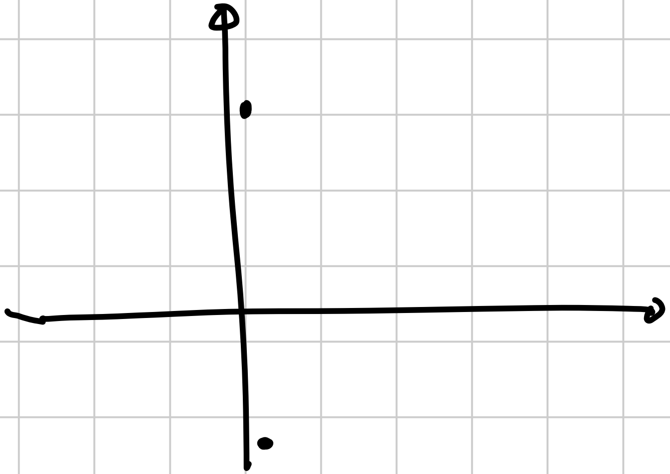
Casi degeneri

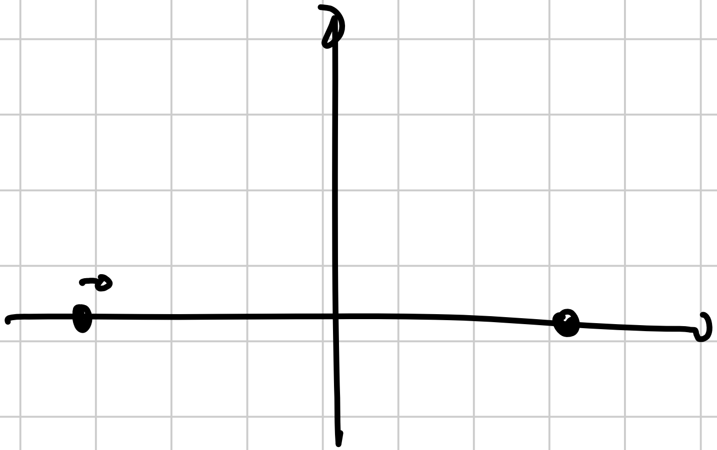








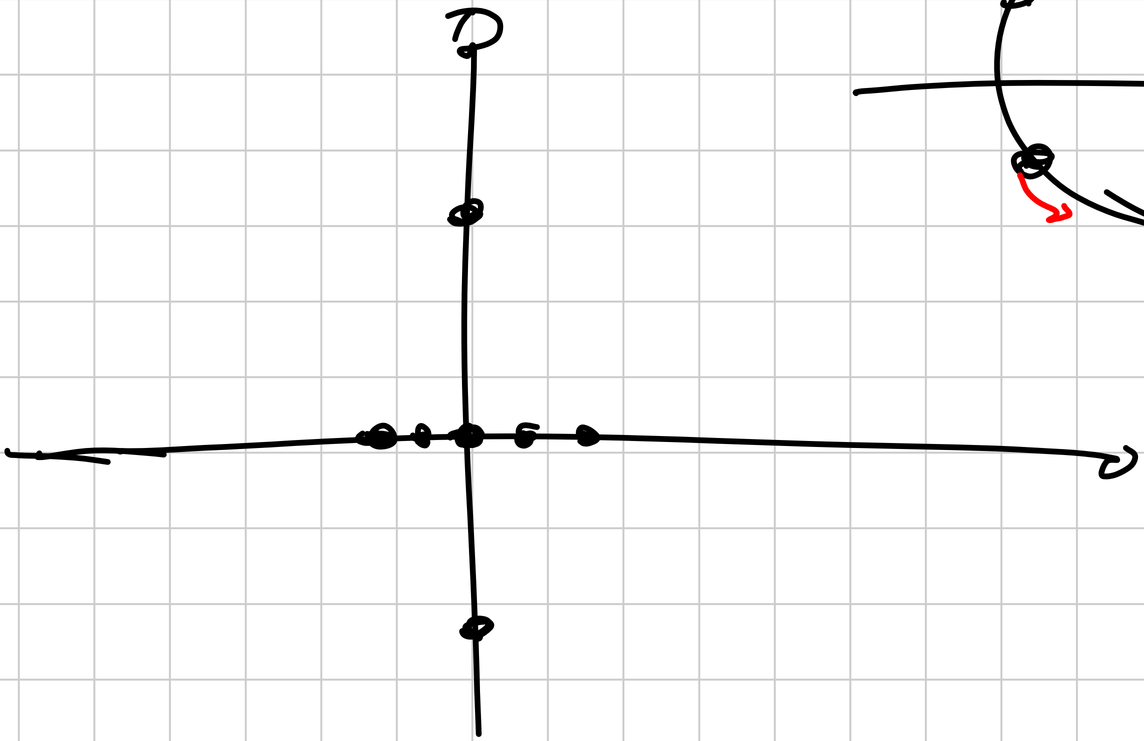


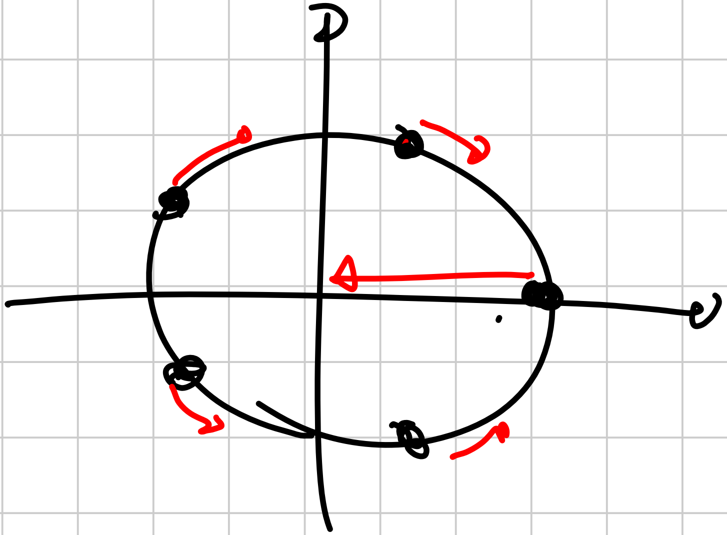


(Più complicato: anche le molteplicità sono le stesse)

$\boxed{Q\mathcal{A}Z}$ $\boxed{Q\mathcal{E}Z}$

$Q\mathcal{A}Q^*$ $Q\mathcal{E}Q^*$





$$\mathcal{E} = \begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} n \\ n \\ m \end{array} \end{array} \qquad \mathcal{A} = \begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc} 0 & A & B \\ A^* & Q & 0 \\ B^* & 0 & R \end{array}\right] \begin{array}{l} n \\ n \\ m \end{array} \end{array}$$

$$\mathcal{E} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} n & n & m \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} n & n & m \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \boxed{0} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & x & 1 \\ -x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad x} & 0 \\ 0 \quad 0 & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ x \end{matrix}} \\ 0 \quad 0 & \end{bmatrix}$$

singolare

<u>Lemma</u>: se $R > 0$ $A - \lambda \mathcal{E}$ ha $2n$ autoval. finiti e m a infinito semplici

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & A & B \\ A^T & Q & 0 \\ B^T & 0 & R \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -R^{-1}B^T & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\left(\begin{bmatrix} -BR^{-1}B^T & A & B \\ A^T & Q & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & R^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ BR^{-1} & 0 & 1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} -BR^{-1}B^T & A & BR^{-1} \\ A^T & Q & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} -BR^{-1}B^T & A & 0 \\ A^T & Q & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

Autoval. di questo pencil: 1) Autoval. di $\begin{bmatrix} -BR^{-1}B^T & A \\ A^T & Q \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

cioè autovalori di $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -BR^{-1}B^T & A \\ A^T & Q \end{bmatrix}$

2) autoval. di $I - \lambda \cdot O$, cioè
n autoval. a ∞ semplici