Note Title 5/7/2019

linear-quadratic optimal control

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$\min \int_0^\infty \left(x(t)^T Q\, x(t) + u(t) R u(t) \right) dt$$

s.t. $\dot{x} = Ax + Bu$
$x(0) = x_0$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} n & n & m \end{array} \\ \begin{array}{c} n \\ n \\ m \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} \dot{\mu} \\ \dot{x} \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A & B \\ A^T & Q & 0 \\ B^T & 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ x \\ u \end{bmatrix}$$

$u = -R^{-1}B^T\mu$

$0 = B^T\mu + Ru$

$x(0) = x_0$

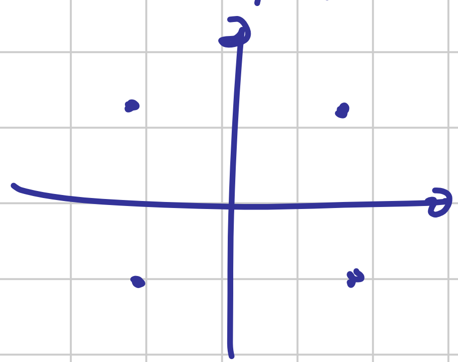
$$\lim_{t \to \infty} \begin{bmatrix} x(t) \\ \mu(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = 0$$

$$\operatorname{eig}\left(\left[\begin{array}{cc|c} 0 & A & B \\ A^T & Q & 0 \\ \hline B^T & 0 & R \end{array}\right], \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{cases} \cdot\, m \text{ @ } \infty \\ \cdot\, 2n \text{ enbrel.} \\ d_i \ldots \end{cases}$$

di $\left(\begin{bmatrix}0 & A\\ A^T & Q\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix}R^{-1}\begin{bmatrix}B^T & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\right)$

$= \left(\begin{bmatrix}-BR^{-1}B^T & A\\ A^T & Q\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\right)$, cioè di $\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix}-BR^{-1}B^T & A\\ A^T & Q\end{bmatrix}$.

Questi autovalori hanno "simmetria pari", i.e., sono simmetrici rispetto all'asse immaginario



$A = A^T \qquad Q = Q^T$

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\mu}\\ \dot{x}\end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix}0 & A\\ A^T & Q\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix}R^{-1}B^T\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\right)\begin{bmatrix}\mu\\ x\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot\mu \\ \dot x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -BR^{-1}B^T & A \\ A^T & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ x \end{bmatrix}$$

$$(*) \quad \begin{bmatrix} \dot x \\ \dot\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \mu \end{bmatrix} \qquad x(0) = x_0, \quad \lim_{t\to\infty} \begin{bmatrix} x \\ \mu \end{bmatrix} = 0$$

$$G := BR^{-1}B^T$$

$$\begin{bmatrix} A & -G \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} =: \mathcal{H}$$ matrice Hamiltoniana del sistema

---

Soluzione di $(*)$: $\begin{bmatrix} x \\ \mu \end{bmatrix} = \exp\left(t\,\mathcal{H}\right) \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ \mu_0 \end{bmatrix}$ (se so μ_0)

La soluzione soddisfa $\lim_{t\to\infty} \begin{bmatrix} x \\ \mu \end{bmatrix} = 0$ se e solo se $\begin{bmatrix} x_0 \\ \mu_0 \end{bmatrix} = \mathcal{U}$,

dove $\mathcal{U}$ è il sottosp. inv. stabile di $\mathcal{H}$, cioè

$$\text{span}\left(u_i : u_i \text{ elemento di una catena di Jordan di } \mathcal{H} \text{ con autovalore } \lambda \in LHP = \{\operatorname{Re}\lambda < 0\} \right)$$

Assunzione 1: $\mathcal{H} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ha esattamente n autovalori in LHP $\iff$ non ha autovalori $\in i\mathbb{R}$

Assunzione 2: il sottosp. inv. stabile si può scrivere $\text{span} \begin{array}{c} n \\ \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} \begin{array}{c} n \\ n \end{array} \end{array}$

$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$ base $\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} I \\ U_2 U_1^{-1} \end{bmatrix}$ base, sse $\det U_1 \neq 0$

Ogni altra base di $\mathcal{U}$ si scrive $\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} M$, $\det M \neq 0$, quindi $\det(V_1) \neq 0 \iff \det(U_1 M) \neq 0 \iff \det(U_1) \neq 0$

Se io conosco $U = \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}$, allora $\begin{bmatrix} x_0 \\ \mu_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} x_0$

Ricapitolando, per risolvere controllo ottimale:

1) Calcola $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ t.c. $\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}$ è una base del sottosp. stabile di $\mathcal{H} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$

2) La soluzione è $\begin{bmatrix} x(t) \\ \mu(t) \end{bmatrix} = \exp(t\mathcal{H}) \cdot \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} x_0$

$\mu(t) = X x(t)$ per ogni t

$\dot{x}(t) = A x(t) - BR^{-1}B^T \mu(t) = A x(t) - BR^{-1}B^T X x(t)$

$$= \underbrace{\left(A - BR^{-1}B^T X\right)}_{= A - GX} x(t) \Rightarrow \text{feedback control, } u(t) = F x(t),$$

con $F = -R^{-1}B^T X$

Il punto (1), trovare una base $\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}$ del sottosp. stabile di $\mathcal{H} = \begin{bmatrix} A & -G \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$, è equivalente a un'equazione di matrici:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} n & n \end{array} \quad n \\ \begin{array}{c} n \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} A & -G \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} R \end{array}$$

per una qualche $R \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$\text{eig}(R) \subseteq LHP$

Gli autoval. di R sono gli autoval. di $\mathcal{H}$ ristretto al sottosp. $\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} A & -G \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ X \end{bmatrix} \boxed{R} \rightarrow$$

eig(R) = sottoinsieme di eig(H) associato al sottosp. $\begin{bmatrix} 1 \\ X \end{bmatrix}$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} A - GX = R \\ -Q - A^T X = XR \end{cases}$$

$$-Q - A^T X = X(A - GX)$$

$$\boxed{XGX = A^T X + XA + Q} \quad (**)$$

equazione di Riccati algebrica

$+ \ \mathrm{eig}(A - GX) \subseteq LHP$

$$\dot{x} = \cancel{a}x^2 + bx + c \iff \dot{X} = A^T X + XA + Q - XGX$$

$(**)$ ha $\binom{2n}{n}$ soluzioni se $\mathcal{H}$ ha tutti autoval. distinti;

(difatti, basta prendere n autovalori dei $2n$ di $\mathcal{H}$,

costruire $U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$, e $X = U_2 U_1^{-1}$ risolve $(**)$)

Se $\mathcal{H}$ ha autoval. ripetuti, ∞ soluzioni

Def: $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ si chiama <u>Hamiltoniana</u> se

$B = B^*$, $C = C^*$, $D = -A^*$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{J} \underbrace{\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}}_{H} = \begin{bmatrix} C & D \\ -A & -B \end{bmatrix} \text{ è Hermitiana}$$

$$\Leftrightarrow (JH) = (JH)^* = H^* J^* = -H^* J \Leftrightarrow JH = -H^* J$$

se considerate il prodotto scalare indefinito $\langle u, v \rangle := u^* J v$,

allora per ogni u, v vale $\langle u, Hv \rangle = u^* J H v = -u^* H^* J v$

$= -\langle Hu, v \rangle$

Matrici Hamiltoniane = matrici anti-autoaggiunte rispetto al prodotto scalare (indefinito) associato a J.

Tutte le matrici Hamiltoniane hanno autovalori simmetrici rispetto all'asse immaginario; difatti,

$$Hv = \lambda v \iff v^* \bar{\lambda} = v^* H^* = -v^* J H J^{-1}$$

$$\iff (v^* J)(-\bar{\lambda}) = (v^* J) H$$

Quindi: se λ è un autoval. di H con autovett. destro v, allora $-\bar{\lambda}$ è autoval. di H con autovel. sinistro Jv

(analogamente, si vede che se c'è una catena di Jordan destra di lunghezza h in λ, allora c'è una catena di Jordan di lunghezza h in $-\bar{\lambda}$, ottenuta moltiplicando per J.

Dimostriamo validità delle assunzioni fatte:

Lemma: se (A, B) controllabile (stabilizzabile) $Q \succ 0$ (o anche $Q \succeq 0$ e (A^*, Q) controllabile) allora $R \succ 0$

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$$ non ha autoval. immaginari puri $\omega \in \mathbb{R}$

Dim: supponiamo che $\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = i\omega \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} z_2^* & +z_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} z_2^* & +z_1^* \end{bmatrix} i\omega \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = i\omega \cdot \begin{bmatrix} z_2^* z_1 + z_1^* z_2 \end{bmatrix}$ è immaginario puro, quindi

$$\mathrm{Re}\begin{bmatrix} z_2^* & z_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$0 = \mathrm{Re}\Big(\cancel{z_2^* A z_1} - \underbrace{z_2^* BR^{-1}B^T z_2}_{\substack{\text{reale} \\ \geq 0}} - \underbrace{z_1^* Q z_1}_{\substack{\text{reale} \\ > 0 \text{ se } z_1 \neq 0}} - \cancel{z_1 A^T z_2} \Big)$$

$\Rightarrow$ deve succedere che $z_1 = 0$, perché valga l'uguaglianza.

Quindi

$$\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^* \\ -Q & -A^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ z_2 \end{bmatrix} = i\omega \begin{bmatrix} 0 \\ z_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} BR^{-1}B^* z_2 = 0 & \text{(i)} \\ -A^* z_2 = i\omega z_2 & \text{(ii)} \end{cases}$$

(i) implica $0 = z_2^* BR^{-1}B^* z_2 \Rightarrow B^* z_2 = 0$

(ii) implica che z_2 è un autovett. sinistro di A con autoval. $-i\omega$

che contraddice una delle condizioni equivalenti di controllabilità. $\square$
(stabilizzabilità)

__Lemma 2__: (A,B) stabilizzabile, $Q \succcurlyeq 0$ $G \succcurlyeq 0$

$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$ sottosp. inv. stabile, allora U_1 invertibile

Supponiamo che esista $v \neq 0$ tale che $U_1 v = 0$

Visto che $\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$ ha rango pieno, dev'essere $U_2 v \neq 0$

$$\underbrace{v^* U_2^* G U_2 v}_{\geq 0} = v^* \begin{bmatrix} U_2^* & -U_1^* \end{bmatrix} \mathcal{H} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} v = v^* \underbrace{\begin{bmatrix} U_2^* & -U_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}}_{=0} R v = 0$$

perché $\begin{bmatrix} U_2^* & -U_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^* & U_2^* \end{bmatrix} J$ è il sottosp. inv. sinistro associato agli autovalori nel RHP, e autovet. destri e sinistri associati ad autoval. distinti sono ortogonali.

$v^* U_2^* G U_2 v = 0$ implica che $B^* U_2 v = 0$

$$G U_2 v = 0$$