Note Title 5/8/2019

Controllo ottimale $\quad \min \int_0^\infty \left(x(t)^* Q x(t) + u(t)^* R u(t) \right) dt$

$Q \succeq 0 \quad R \succ 0$

s.t. $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad x_0 = x_0$

$\Updownarrow$

BVP:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mu} \\ \dot{x} \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A & B \\ A^* & Q & 0 \\ B^* & 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ x \\ u \end{bmatrix} \qquad x(0) = x_0 \qquad \lim_{t \to \infty} \begin{bmatrix} \mu \\ x \\ u \end{bmatrix} = 0$$

$\Updownarrow$

sottosp. inv. stabile di $\mathcal{H} = \begin{bmatrix} A & -G \\ -Q & -A^* \end{bmatrix} \qquad G = BR^{-1}B^*$

$\Updownarrow$

$\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}$ dove X risolve $\quad A^*X + XA + Q = XGX \quad , \quad \operatorname{eig}(A - GX) \subseteq LHP$

equazione di Riccati algebrica $\qquad$ "stabilizing solution"

$$\begin{bmatrix} A & -G \\ -Q & -A^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ X \end{bmatrix} R \qquad \begin{cases} A - GX = R \\ -Q - A^*X = XR = X(A-GX) \end{cases}$$

<u>Lemma</u>: La soluzione stabilizzante di una ARE è Hermitiana, $X = X^*$

<u>dim</u>: Abbiamo detto che H è una matrice Hamiltoniana, cioè

$$JH = -H^*J \qquad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

e che se v è un autovett. destro di H con autovalore λ, allora v^*J è un autovett. sinistro con autoval. $-\bar{\lambda}$

$$\left[\; Hv = \lambda v \qquad \begin{aligned} v^*\bar{\lambda} &= v^*H^* = v^*(-JHJ^{-1}) \\ (v^*J)(-\bar{\lambda}) &= v^*JH \end{aligned} \;\right]$$

e lo stesso cosa per le catene di Jordan

In particolare, se $\begin{bmatrix} 1 \\ X \end{bmatrix}$ è una base del sottosp. invariante stabile (destro), allora $\begin{bmatrix} 1 & X^* \end{bmatrix} J$ è una base del sottosp. inv. antistabile sinistro, cioè span(v^* : v^* autovett. sinistro con autovalore λ con $Re\,\lambda > 0$ o elem. di una catena di Jordan)

Autovettori destri e sinistri relativi ad autoval. distinti sono ortogonali, quindi

$$0 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & X^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{sottosp. inv. sinistro anti-stabile}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ X \end{bmatrix}}_{\text{sottosp. inv. destro stabile}} = X - X^*$$

$\Rightarrow X$ Hermitiana

(Proprietà geometrica associata: il sottospazio span $\begin{bmatrix} 1 \\ X \end{bmatrix}$ è fatto tutto di vettori t.c. $\langle v, w \rangle_J = v^* J w = 0$ $\forall v, w \in \text{span} \begin{bmatrix} 1 \\ X \end{bmatrix}$.

$$A^*X + XA + Q = XGX$$

$$F(X) = A^*X + XA + Q - XGX \qquad F : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$$

Derivata di Fréchet:

$$F(X+H) = A^*(X+H) + (X+H)A + Q - (X+H)G(X+H)$$

$$= \underbrace{A^*X + XA + Q - XGX}_{F(X)} + \underbrace{A^*H + HA - HGX - XGH}_{L_{F,X}(H)} + \underbrace{HGH}_{o(\|H\|)}$$

$$L_{F,X} : H \longmapsto (A - GX)^* H + H(A - GX).$$

Metodo di Newton:

$$H_k = -L_{F,X_k}^{-1}\big(F(X_k)\big) \;, \qquad X_{k+1} = X_k + H_k$$

$$L_{F,X_k}(H_k) \overset{\Downarrow}{=} -F(X_k)$$

$$(*) \quad (A-GX_k)^* H_k + H_k(A-GX_k) = -(A^*X_k + X_kA + Q - X_kGX_k)$$

Trovo l'incremento H_k risolvendo un'equazione di Lyapunov.

1. Scelgo X_0 opportunamente
2. For $k=0,1,2,\dots$

    H_k = soluzione di $(*)$

    $X_{k+1} = X_k + H_k$

Costo = cubico, ad ogni passo serve una forma di Schur

$$(A-GX_k)^*(X_{k+1}-X_k) + (X_{k+1}-X_k)(A-GX_k) = -(A^*X_k + X_kA + Q - X_kGX_k)$$

$$(A-GX_k)^* X_{k+1} + X_{k+1}(A-GX_k) = \overset{\leq 0}{\boxed{-\underset{\geq 0}{Q} - \underset{\geq 0}{X_kGX_k}}}$$

Se $\mathrm{eig}(A-GX_k) \subseteq LHP$, allora $X_{k+1} \succcurlyeq 0$

Se fosse $Q+X_kGX_k \succ 0$ e $X_{k+1} \succ 0$, allora $\mathrm{eig}(A-GX_k) \subseteq LHP$

(Altra osservazione: $L_{F,X_*}(H) = (A-GX_*)^* H + H(A-GX_*)$

$$K_{F,X_*} = \underbrace{(A-GX_*)}_{\text{autovalori tutti in } LHP}{}^T \otimes I + I \otimes \underbrace{(A-GX_*)}_{\text{autovalori tutti in } LHP}{}^*$$

$\Rightarrow K_{F,X_*}$ è invertibile

(i suoi autoval. sono $\mathrm{eig}((A-GX_*)^T) + \mathrm{eig}((A-GX_*)^*)$))

Teo: $\mathrm{eig}(A-GX_0) \subseteq LHP \Rightarrow$

X_0 ?? $X_1 \succcurlyeq X_2 \succcurlyeq X_3 \succcurlyeq \dots \succcurlyeq X_* \succcurlyeq 0$, e Newton converge a X_*

Idea: dimostriamo per induzione questa proprietà:

$$\begin{cases} 1.\ eig(A - GX_k) \subseteq LHP \\ 2.\ X_k - X_{k+1} \geq 0 \quad X_k \geq 0 \\ 3.\ X_k - X_* \geq 0 \end{cases}$$

$1_k \Rightarrow 2_k$ ✓

$1_k \Rightarrow 3_{k+1}$ ✓

$1_k, 3_{k+1} \Rightarrow 1_{k+1}$ ✓

Supponiamo $eig(A - GX_k) \subseteq LHP$

Dim. che vale questa Lyap:

$$(A - GX_k)^*(X_k - X_{k+1}) + (X_k - X_{k+1})(A - GX_k) = -(X_k - X_{k-1})G(X_k - X_{k-1})$$

$$(A - GX_k)^* X_{k+1} + X_{k+1}(A - GX_k) = -Q - X_k G X_k$$

$$(A - GX_{k-1})^* X_k + X_k(A - GX_{k-1}) = -Q - X_{k-1} G X_{k-1}$$

$-X_k G X_k$ | $-X_k G X_k$ | $-2X_k G X_k$

$+X_{k-1} G X_k$ | $+X_k G X_{k-1}$ | $+X_{k-1} G X_k + X_k G X_{k-1}$

$$\hookrightarrow (A-GX_k)^* X_k + X_k(A-GX_k) = -Q - X_{k-1}GX_{k-1} - 2X_kGX_k + X_{k-1}GX_k + X_kGX_{k-1}$$

$$(A-GX_k)^*(X_k-X_{k+1}) + (X_k-X_{k+1})(A-GX_k) = \underbrace{-(X_k-X_{k-1})G(X_k-X_{k-1})}_{\leq 0}$$

Se $A-GX_k$ stabile, allora $X_k - X_{k+1} \geq 0$

$2_k \Rightarrow 3_{k+1}$

$$(X_* - X_{k+1})(A-GX_k) + (A-GX_k)^*(X_* - X_{k+1}) = -(X_* - X_k)G(X_* - X_k)$$

segue combinando $X_{k+1}(A-GX_k) + (A-GX_k)^* X_{k+1} = -Q - X_kGX_k$

e $X_*A + A^*X_* + Q = X_*GX_*$

se $A-GX_k$ stabile allora $X_{k+1} - X_* \geq 0$

$$(X_{k+1} - X_*)(A - GX_{k+1}) + (A - GX_{k+1})^*(X_{k+1} - X_*)$$

$$(***) \qquad = \underbrace{-(X_{k+1}-X_k)G(X_{k+1}-X_k) - (X_{k+1}-X_*)G(X_{k+1}-X_*)}_{\leq 0}$$

Vorremmo dire che $A - GX_{k+1}$ stabile usando $\begin{cases} X_{k+1} - X_* \succcurlyeq 0 \\ RHS \preccurlyeq 0 \end{cases}$

Ipotesi: $X_{k+1} - X_* \succcurlyeq 0$, $\mathrm{eig}(A - GX_k) \subset LHP$

Dobbiamo modificare leggermente la dim. del lemma con le eq. di Lyapunov.

Supponiamo che $(A - GX_{k+1})v = \lambda v$, con $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$;

allora, moltiplichiamo $(***)$ per v^* e v:

$$v^*(X_{k+1} - X_*)\lambda v + v^*\bar{\lambda}(X_{k+1} - X_*)v = -v^*(X_{k+1}-X_k)G(X_{k+1}-X_k)v$$
$$- v^*(X_{k+1}-X_*)G(X_{k+1}-X_*)v$$

$$\underset{\geq}{(\lambda + \bar{\lambda})}\ \underset{\geq}{\left(v^*(X_{k+1} - X_*)v\right)} = \underset{\leq}{\cdots}$$

$\qquad 0 \qquad\qquad\qquad 0 \qquad\qquad\qquad 0$

un'uguaglianza di questo tipo può valere solo se $LHS = RHS = 0$

$$RHS = 0 \implies G(X_{k+1} - X_k)v = 0$$

$$\implies (A - GX_k)v = (A - GX_{k+1})v = \lambda v$$

e quindi anche $A - GX_k$ non era stabile, impossibile per ip. indutt.

Analogamente, si dimostra che altre successioni convergono monotonamente, ad es. l'equazione di punto fisso

$$X_{k+1} A + A^* X_{k+1} = -Q - X_k G X_k$$

(situazione parallela a diverse iterazioni per eq. matriciali in metodi numerici per catene di Markov; convergono monotonamente)

Per ogni $v \in \mathbb{R}^n$,

$v^* X_k v$ è decrescente $\Rightarrow$ converge

Lo applico con $v = e_i$ $\Rightarrow$ $\mathrm{diag}(X_k)$ converge

Lo applico con $v = e_i - e_j$ $\Rightarrow$ X_{ij} converge

$\Rightarrow$ X_k converge a una qualche matrice X_∞

Passando al limite $X_{k+1}(A - GX_k) + (A - GX_k)^* X_{k+1} = -Q - X_k G X_k$

vediamo che X_∞ risolve l'ARE

Passando al limite, anche $\mathrm{eig}(A - G X_\infty) \subseteq \overline{LHP}$ (chiuso),

ma l'unica soluzione della ARE con autoval. in LHP è X_*.

$H = Q T Q^*$ forma di Schur si può riordinare, cioè da Q, T posso produrre $\hat{Q}, \hat{T}$ che è un'altra forma di Schur e ha gli autovalori in un ordine a mio piacimento.

In particolare, se scelgo

$$\hat{T} = \left[\begin{array}{c|c} T_{11} & T_{12} \\ \hline 0 & T_{22} \end{array}\right] \quad \text{tale che} \quad \begin{array}{l} \operatorname{eig}(T_{11}) \subseteq LHP \\ \operatorname{eig}(T_{22}) \subseteq RHP \end{array},$$

allora $\begin{bmatrix} \hat{Q}_{11} \\ \hat{Q}_{21} \end{bmatrix}$ è una base del sott. invariante stabile:

difatti, $H = \hat{Q} \hat{T} \hat{Q}^* \Rightarrow H\hat{Q} = \hat{Q}\hat{T}$

$$\Rightarrow H \begin{bmatrix} \hat{Q}_{11} \\ \hat{Q}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Q}_{11} \\ \hat{Q}_{21} \end{bmatrix} \hat{T}_{11}$$

$X = \hat{Q}_{21} \hat{Q}_{11}^{-1}$

$$\begin{bmatrix} \hat{Q}_{11} \\ \hat{Q}_{21} \end{bmatrix} \hat{Q}_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ X \end{bmatrix}$$

Questo metodo produce (in aritmetica di macchina) un $\begin{bmatrix} \tilde{\hat{Q}}_{11} \\ \tilde{\hat{Q}}_{21} \end{bmatrix}$ che è un sottosp. inv. esatto di $H + \Delta H$, con $\|\Delta H\| / \|H\| = O(u)$.

Problema: non è garantito che $H + \Delta H$ è Hamiltoniana