Note Title 5/14/2019

Def H Hamiltoniana se

$$H = \begin{bmatrix} A & -G \\ -Q & -A^* \end{bmatrix} \qquad JH = (JH)^* = -H^* J$$

$G = G^*$
$Q = Q^*$

$$J = \begin{array}{cc} n & n \end{array}$$
$$J = \begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} n \\ n \end{array}$$

cioè, definendo

$$\langle v, w \rangle = v^* J w, \text{ si ha } \langle v, H w \rangle = -\langle H v, w \rangle$$

Def: S si dice <u>simplettica</u> se è ortogonale rispetto a questo prodotto scalare, cioè, $\langle v, w \rangle = \langle Sv, Sw \rangle \quad \forall v, w$

$$v^T J w = v^T S^T J S w$$
$$J = S^T J S.$$

Sono esempi di matrici simplettiche e ortogonali

1) $\operatorname{diag}\left(\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}\right), \quad Q = Q^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$

2) $\text{Givens}(k, n+k) \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & c & & & -s & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & 1 & & \\ & s & & & c & \\ & & & & & 1 \end{array}\right]$

3) dato $U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$ tale che $\begin{bmatrix} U_1^T & U_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow$$

$$U_1^T U_2 = U_2^T U_1$$

$$\Updownarrow$$

$$U_2 U_1^{-1} = \left(U_2 U_1^{-1}\right)^T$$

$$\Updownarrow$$

$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$ ha una base della forma $\begin{bmatrix} 1 \\ X \end{bmatrix}$ $\quad X = X^* = U_2 U_1^{-1}$

Se $\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$ è una base o.n. di questo sottospazio, cioè $\begin{bmatrix} U_1^T & U_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = I$

Allora $\begin{bmatrix} U_1 & -U_2 \\ U_2 & U_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & JU \end{bmatrix}$

Ci interessano matrici simplettiche e ortogonali perché vorremmo un algoritmo QR-like che preservi Hamiltonianità:

<u>Lemma</u>:

$H \mapsto S^{-1} H S$ preserva Hamiltonianità sse S simplettica

<u>dim</u>: le ipotesi sono

(1) $JH = -H^* J$, $S^* J S = J$ (2)

La tesi è

$$J S^{-1} H S = -S^* H^* S^{-*} J$$

$$\Updownarrow$$

(3) $$S^{-*} J S^{-1} H = H^* S^{-*} J S^{-1}$$

(1) implica la (3) per ogni H Hamiltoniana se e solo se

$$S^{-*} J S^{-1} = J \iff J = S^* J S$$

moltiplicando per S^* e S $\square$

E lo vorremmo anche con cambi di base ortogonali, per stabilità: $\|v\| = \|Qv\|$ se Q ortogonale...

(di suo, le matrici simplettiche non assicurano nulla di simile.

Per esempio $\begin{bmatrix} 1 & M \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ è simplettica

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ M & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & M \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & M \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & M-M \end{bmatrix}$$

)

"Laub trick": Il metodo con forme di Schur simplettiche produce base $\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$ del sottosp. inv. stabile come le prime colonne $Q(:, 1:n)$ della Q prodotta da ordschur()

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} U_1 & -U_2 \\ U_2 & U_1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} U_1 & * \\ U_2 & * \end{bmatrix} \rightarrow \hat{U} = \begin{bmatrix} U_1 & -U_2 \\ U_2 & U_1 \end{bmatrix}$$

Dopo schur: $U^{-1} H U = T \qquad HU = UT$

$$H \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$$

$$HU_1 = U_1 T_{11}$$

simmetrica

$$\hat{U}^{-1} H \hat{U} = \left[\begin{array}{c|c} T_{11} & * \\ \hline 0 & -T_{11}^* \end{array}\right]$$

dev'essere così perché $\hat{U}^{-1} A \hat{U}$ è Hamiltoniana

dev'essere così perché $\hat{U}(:,1:n)$ è invariato rispetto a U

Gli autovalori di H sono $eig(T_{11}) \cup eig(-T_{11}^*)$, che quindi hanno le simmetrie richieste.

URV decomposition: cerchiamo una decomposizione del tipo $H = URV$, con U, V ortosimplettiche

$$R = \left[\begin{array}{c|c} R_{11} & R_{12} \\ \hline 0 & R_{22} \end{array}\right], \text{ con } R_{11}, R_{22}^* \text{ triang. sup.}$$

(Occhio che R non è Hamiltoniana)

Se abbiamo trovato questa decomposizione, allora

$$H^* = V^* R^* U^* \quad \text{ma} \quad H^* = -JHJ^{-1} = JHJ$$

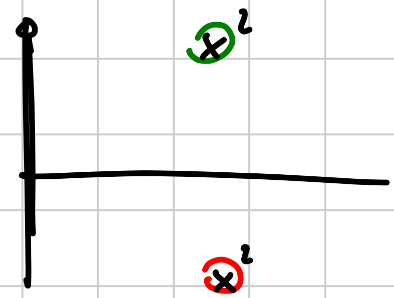
$$U^* = JU^{-1}J$$

$$V^* = JV^{-1}J$$

$$\cancel{J}H\cancel{J} = \cancel{J}V^{-1}\underbrace{JR^*J}U^{-1}\cancel{J}$$

$$H = V^{-1}\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} -R_{22}^* & R_{12}^* \\ \hline 0 & -R_{11}^* \end{array}\right]}U^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \times & \times \\ \hline \times & \times \end{array}\right)^2 =$$



$$H^2 = U\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix}\cancel{V V^{-1}}\begin{bmatrix} -R_{22}^* & R_{12}^* \\ 0 & -R_{11}^* \end{bmatrix}U^{-1} = U\left[\begin{array}{c|c} -R_{11}R_{22}^* & * \\ \hline 0 & -R_{22}R_{11}^* \end{array}\right]U^{-1}$$

① moltiplico per diag(Q, Q)

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}
\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times\\
\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times\\
\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times\\
\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times\\ \hline
\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times\\
\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times\\
\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times\\
\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times
\end{array}\right]
\xrightarrow{①}
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times\\
\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times\\
\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times\\
\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times\\ \hline
\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times\\
0&\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times\\
0&\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times\\
0&\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times
\end{array}\right]
\xrightarrow{②}$$

moltiplico per una givens(1, n+1)

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}
\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times\\
\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times\\
\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times\\
\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times\\ \hline
0&\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times\\
0&\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times\\
0&\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times\\
0&\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times
\end{array}\right]
\xrightarrow{\mathrm{diag}(Q,Q)}
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times\\
0&\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times\\
0&\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times\\
0&\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times\\ \hline
0&\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times\\
0&\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times\\
0&\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times\\
0&\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times
\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}
x & x & x & x & x & x & x & x\\
0 & x & x & x & x & x & x & x\\
0 & x & x & x & x & x & x & x\\
0 & x & x & x & x & x & x & x\\
\hline
0 & x & x & x & x & x & x & x\\
0 & x & x & x & x & x & x & x\\
0 & x & x & x & x & x & x & x\\
0 & x & x & x & x & x & x & x
\end{array}\right]$$

molt. a destra per blk diag(Q, Q) che agisce solo su comp. 2:n $\longrightarrow$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}
x & x & x & x & x & x & x & x\\
0 & x & x & x & x & x & x & x\\
0 & x & x & x & x & x & x & x\\
0 & x & x & x & x & x & x & x\\
\hline
0 & 0 & 0 & x & x & x & x & x\\
0 & x & x & x & x & x & x & x\\
0 & x & x & x & x & x & x & x\\
0 & x & x & x & x & x & x & x
\end{array}\right] \longrightarrow$$

molt. a destra per una Givens (n, 2n)

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc}
x & x & x & x & x & x & x & x\\
0 & x & x & x & x & x & x & x\\
0 & x & x & x & x & x & x & x\\
0 & x & x & x & x & x & x & x\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & x & x & x & x\\
0 & x & x & x & x & x & x & x\\
0 & x & x & x & x & x & x & x\\
0 & x & x & x & x & x & x & x
\end{array}\right]$$

molt. a destra per una Householder diag(Q, Q) che agisce su 2..n $\longrightarrow$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}
x & x & x & x & x & x & x & x\\
0 & x & x & x & x & x & x & x\\
0 & x & x & x & x & x & x & x\\
0 & x & x & x & x & x & x & x\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & x & x & 0 & 0\\
0 & x & x & x & x & x & x & x\\
0 & x & x & x & x & x & x & x\\
0 & x & x & x & x & x & x & x
\end{array}\right]$$

ripeto operando solo sulle colonne 2..n

$$\to \left[\begin{array}{cccc|cccc}
\times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\
0 & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\
0 & 0 & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\
0 & 0 & 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times & \times \\
0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times & \times
\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c}
\text{triang.} & \text{piena} \\
\hline
0 & \text{Hessenberg}^*
\end{array}\right]$$

Si può continuare il processo e ottenere una R_{22}^* triangolare anziché Hessenberg, ma se vogliamo solo calcolare gli autovalori ci basta anche R_{22} Hessenberg.

Una volta che ho questa decomposizione, posso leggere immediatamente gli autovalori di H^2 (che vengono in coppie $\lambda^2, \bar{\lambda}^2$ con molteplicità 2).

e <u>un</u> autovettore per ognuno di essi.

Faccio partire un Arnoldi su H per ognuno di questi autovettori, e ottengo breakdown al secondo step $\Rightarrow$ da qui ricavo i due autovalori/autovettori

---

Per ottenere un metodo completamente stabile all'indietro, servirebbe anche un modo stabile all'indietro di calcolare gli autovalori di $-R_{11}R_{22}^*$

Se faccio il prodotto e poi faccio una forma di Schur, calcolo gli autovalori di $-R_{11}R_{22}^* + E$, $\|E\| \leq \|R_{11}R_{22}^*\| \cdot O(u)$,

non quelli $-(R_{11}+E_1)(R_{22}+E_2)^*$, $\|E_1\| \leq \|R_1\| \cdot O(u)$
$\|E_2\| \leq \|R_2\| \cdot O(u)$

<u>ES</u>: il QZ calcola

$\text{eig}(A, E)$ senza mai formare $E^{-1}A$,

ed è stabile all'indietro nel senso che produce autovalori esatti di $(E+\Delta E)^{-1}(A+\Delta A)$

("product eigenvalue problems")