

Lyapunov equations

Note Title

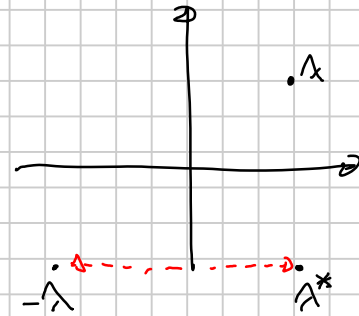
2020-04-30

$$A^*X + XA + Q = 0 \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, Q = Q^* \succeq 0 \quad (L)$$

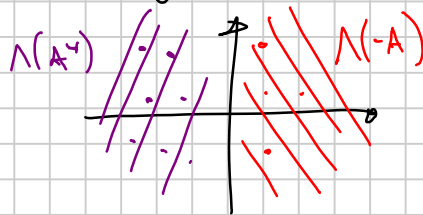
Caso speciale delle eq. di Sylvester ($AX - XB = C$).

Risolubile se $\Lambda(A^*) \cap \Lambda(-A) = \emptyset$
 (∃! soluzione)
 per ogni Q.

↑
 sono un coniugato insieme
 e il suo "specchiato"
 rispetto all'asse immaginario



Caso importante: $\Lambda(A) \subseteq \text{LHP} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) < 0\}$



Lemma: se (L) ha sol. unica X, allora $X = X^*$

Dim: Prendiamo traspo. con. di (L)

$$(L) \quad A^*X + XA + Q = 0$$

$$(L^*) \quad X^*A + A^*X^* + Q = 0 \quad \Rightarrow X^* \text{ risolve (L)} \Rightarrow X = X^*$$

Lemma: $\Lambda(A) \subseteq \text{LHP}$, allora $Q \succ 0 \Rightarrow X \succ 0$

$$\boxed{Q \succ 0 \Rightarrow X \succ 0}$$

Dim: Si ha

$$X = \int_0^{\infty} \exp(A^*t) Q \exp(At) dt$$

(Nota che se $\Lambda(A) \subseteq \text{LHP}$, allora $\exp(At) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$)

(come $\exp(\lambda_x t)$, dove λ_x è l'autoval. di A con parte reale maggiore)

$$\exp(At) = V \begin{bmatrix} \exp(\lambda_1 t) \\ \vdots \\ \exp(\lambda_n t) \end{bmatrix} V^{-1}$$

~~$$\exp(A^*t)Q\exp(At) \Big|_0^x = \frac{d}{dx} \int_0^x \exp(A^*t)Q\exp(At) dt = \int_0^x \frac{d}{dt} \exp(A^*t)Q\exp(At) dt$$~~

~~$$\exp(A^*x)Q\exp(Ax) - Q$$

\downarrow $x \rightarrow \infty$
 \circ~~

$$\int_0^\infty \frac{d}{dt} \exp(A^*t)Q\exp(At) dt = \int_0^\infty A^* \exp(A^*t)Q\exp(At) + \exp(A^*t)Q\exp(At)A dt$$

$$\exp(A^*t)Q\exp(At) \Big|_0^\infty = A^* \int_0^\infty \exp(A^*t)Q\exp(At) dt + \left(\int_0^\infty \exp(A^*t)Q\exp(At) dt \right) A$$

~~$$\exp(A^*\infty)Q\exp(A\infty) - Q$$~~

$$-Q = A^*X + XA$$

Quindi, $X = \int_0^\infty \exp(A^*t)Q\exp(At) dt$

se $Q \succ 0$, $\exp(A^*t)Q\exp(At) \succ 0 \Rightarrow X \succ 0$
 $Q \succ 0$ " $\lambda > 0 \Rightarrow X \succ 0$

Lemma: Se $Q \succ 0$, $X \succ 0$, allora $\Lambda(A) \subseteq \text{LHP}$
 (e ovviamente $A^*X + XA + Q = 0$ (L))

dim: $Av = \lambda v$, $v \neq 0$, allora

$$0 < v^*Qv = - \left(\underbrace{v^*A^*Xv}_{\overline{v^*Xv}} + \underbrace{v^*XAv}_{\overline{Av}} \right) = - \underbrace{(\bar{\lambda} + \lambda)}_{2\text{Re } \lambda} \underbrace{v^*Xv}_{\circ}$$

$$\Rightarrow \text{Re } \lambda < 0$$

Modo diverso di dire il test del Lemma:

Se riesco a trovare $X \succ 0$ f.c. $A^*X + XA \prec 0$, allora $\Lambda(A) \subseteq \text{LHP}$

Cosa c'entra con i sistemi dinamici?

Il sistema dinamico (lineare)

$$\dot{x} = Ax \quad \frac{d}{dt} x(t) = Ax(t) \quad \text{la come sol. } x(t) = \exp(At) x_0$$

$$x(0) = x_0$$

è stabile (cioè $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \rightarrow 0$ per ogni x_0 , esponenzialmente) sse $\Lambda(A) \subseteq \text{LHP}$

Per dimostrare che un sist. din. è stabile, si può fare così:
si trova $X \succ 0$ tale che $A^*X + XA \prec 0$

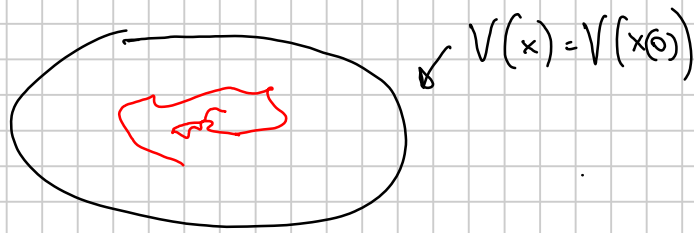
Dm. di Lyapunov di questo fatto: consideriamo $V(x) = x^* X x$
("funzione energia") e dimostriamo che

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) \leq 0$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t)) &= \frac{d}{dt} x(t)^* X x(t) = \dot{x}(t)^* X x(t) + x(t)^* X \dot{x}(t) \\ &= x(t)^* A^* X x(t) + x(t)^* X A x(t) = x(t)^* \underbrace{(A^* X + X A)}_0 x(t) \leq 0 \end{aligned}$$

\Rightarrow la funzione energia scende

$\Rightarrow x(t)$ non può "scappare" dalla regione finita di piano $\{x : x^* X x \leq V(x_0)\}$



Risultato analogo per sist. dinamici a tempo discreto,

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k \\ x_0 \text{ dato} \end{cases}$$

$$x_k = A^k x_0$$

stabile, cioè $x_k \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$, se $\Lambda(A) \subseteq \text{D}$

Equazione di Stein

$$(S) \quad X - A^* X A = Q \quad Q \succ 0 \quad x_0, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Teo: A ha tutti gli autovalori nel disco unitario $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

se e solo se (S) ha una soluzione $X > 0$ e $Q > 0$

Dim: \Leftarrow Prendo v f.c. $Av = \lambda v$

$$v^* X v - \underbrace{v^* A^*}_{v^* \lambda} X \underbrace{A v}_{\lambda v} = v^* Q v > 0$$

$$= (1 - \bar{\lambda} \lambda) \underbrace{v^* X v}_0 \Rightarrow 1 - \underbrace{\bar{\lambda} \lambda}_{|\lambda|^2} > 0 \Rightarrow |\lambda|^2 < 1$$

\Rightarrow Se $\lambda(A) \subseteq \mathbb{D}$, allora vale $X = \sum_{k=0}^{\infty} (A^*)^k Q A^k$

$$\text{Difatti, } X = Q + \sum_{k=1}^{\infty} (A^*)^k Q A^k = Q + A^* \left(\sum_{k=0}^{\infty} (A^*)^k Q A^k \right) A$$

Questa formula dice che $Q > 0 \Rightarrow X > 0$

Come possiamo usare questa formula per dimostrare che un sist. din. discr. è stabile? Supponiamo di aver trovato $X > 0$ f.c. $X - A^* X A > 0$, allora la funzione $V(x) = x^* X x$ è decrescente lungo le traiettorie del sist. dinamico:

$$\begin{aligned} V(x_{k+1}) - V(x_k) &= x_{k+1}^* X x_{k+1} - x_k^* X x_k = x_k^* A^* X A x_k - x_k^* X x_k \\ &= x_k^* (A^* X A - X) x_k \leq 0 \end{aligned}$$

$$(L) \quad A^* X + X A + Q = 0$$

$$(S) \quad X - A^* X A = Q$$

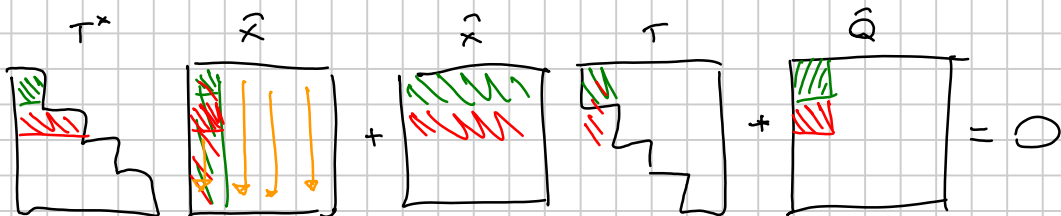
(L) è un'eq. di Sylvester, si risolve numericamente con Bartels-Stewart,

Calcolo $A = U T U^*$ (fatt. di Schur, U unitaria, T triangolare)

$$\cancel{U^*} U^* T^* U^* X U + \underbrace{U^* X U}_{\hat{X}} + \underbrace{U^* Q U}_{\hat{Q}} = 0 \quad (\text{una sola block!})$$

$$T^* \hat{X} + \hat{X} T + \hat{Q} = 0$$

$O(n^3)$



(1,1) $T_{11}^* \hat{X}_{11} + \hat{X}_{11} T_{11} + \hat{Q}_{11} = 0$ posso risolvere per \hat{X}_{11} ($T_{11}^* + T_{11} \neq 0$)

(2,1) $T_{21}^* \hat{X}_{11} + T_{22}^* \hat{X}_{21} + \hat{X}_{21} T_{11} + \hat{Q}_{21} = 0$ posso risolvere per \hat{X}_{21} , e così via

($T_{22}^* + T_{11} \neq 0$)

ver per $\Lambda(A^*) \cap \Lambda(-A) \neq \emptyset$

(S) $X - A^* X A = Q$ non è un'eq. di Sylvester, ne cambia poco
 Equivalente al sist. lineare $n^2 \times n^2$

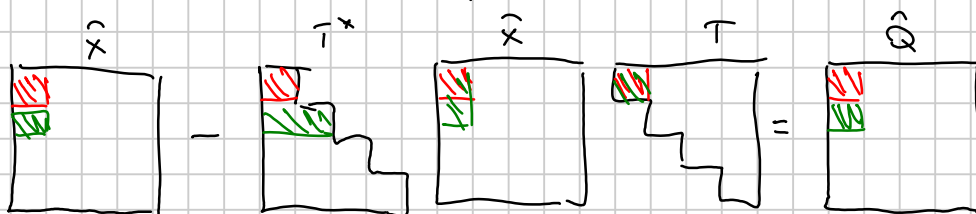
$$(\mathbb{I}_{n^2} - A^T \otimes A^*) \text{vec}(X) = \text{vec}(Q)$$

Di nuovo, non vogliamo risolvere così, ne con un algoritmo tipo Bartels-Stewart

$$A = U T U^*$$

$$\underbrace{U^* X U}_{\hat{X}} - \underbrace{U^* U T^* U^* X U T U}_{\hat{X}} = \underbrace{U^* Q U}_{\hat{Q}}$$

$$\hat{X} - T^* \hat{X} T = \hat{Q}$$



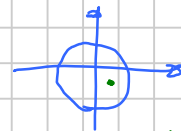
(1,1) $\hat{X}_{11} - T_{11}^* \hat{X}_{11} T_{11} = \hat{Q}_{11}$ risolvo per \hat{X}_{11} $1 - T_{11}^* T_{11} \neq 0$

(2,1) $\hat{X}_{21} - T_{21}^* \hat{X}_{11} T_{11} - T_{22}^* \hat{X}_{21} T_{11}$ risolvo per \hat{X}_{21} $1 - T_{22}^* T_{11} \neq 0$

\vdots \vdots $1 - T_{ii}^* T_{jj} \neq 0$

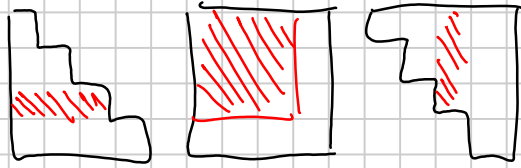
verificato se $\|T_{ii}\| < 1$

o in gen.



Dettaglio che lo focalizzato: Questo metodo è $O(n^3)$?

Se devo calcolare $(3,3)$



entrate $ij \sum_{\substack{bci \\ ksj}} T_{il}^* X_{lk} T_{kj}$, devo fare un numero quadrato di operazioni

n^2 entrate $\times O(n^2)$ operazioni no troppo!

Se ne esce salvandosi righe/colonne già calcolate (non vediamo i dettagli)

Algoritmi di questo tipo funzionano per tutte le equazioni del tipo

$$AXB + CXD = E$$

(eg. matrici di linee con due termini)

(vi serviremo $QZ(A,C)$ $QZ(B,D)$)

Non ci sono (o non so) altri algoritmi $O(n^3)$ per equazioni dello stesso tipo con più di due termini!

$$AXB + CXD + EXF = G. \quad ??$$

Teoria dei controlli:

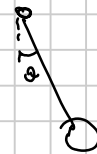
Studio di sistemi dinamici + controlli:

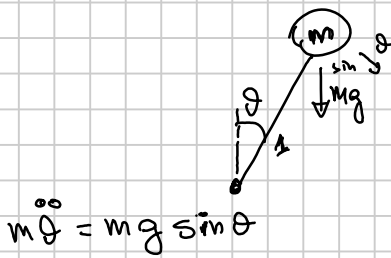
Esempio: cerchiamo di tenere un pendolo in equilibrio



"verso l'alto"

applicando piccole forze laterali:





$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ stato del sistema}$$

($x=0$ stato di equilibrio instabile)

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ g \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ g \sin x_1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} x_2 \\ g x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Equazioni del moto:

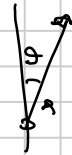
$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

questo sistema è stabile
(attorno al punto di equilibrio $x=0$)

no! la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g & 0 \end{bmatrix}$ ha sia autovalori positivi che negativi

$$\Lambda(A) = \{ \pm \sqrt{g} \}$$

Per renderlo stabile, applichiamo una certa forza $u(t)$ che cerca di controbilanciare la caduta.



Riusciamo a farlo? Come scegliere $u(t)$?

Si può farlo con una forza $u(t) = Fx(t)$ $F \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$

Equaz. del sistema con forze applicative applicate sul fulcro.

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ g x_1 + u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$$

Si riesce a "costruire" un sistema (telecamera + motore) che applica una forza dipendente da x

$$u(t) = Fx(t) = [f_1 \quad f_2] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Le equazioni del sistema con questo "feedback" sono

$$\dot{x} = Ax + BFx = \underbrace{(A+BF)}_x$$

Riusciamo a scegliere f_1, f_2 in modo da $\Lambda(A+BF) \subseteq \text{LHP}$?

Sì!

$$A+BF \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [f_1 \quad f_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g+f_1 & f_2 \end{bmatrix}$$

Scegliendo f_1, f_2 arbitrariamente, pol. car. $(A+BF) = x^2 - f_2 x - (g+f_1)$
 ha radici dove voglio io =)

Remark: mi servono davvero tutte e due le componenti: se osservo solo la
 posizione ($u = f_1 x_1, f_2 = 0$), allora non riesco a controllare
 il sistema!

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g+f_1 & 0 \end{bmatrix} \text{ non ha mai autoval. } \subseteq \text{LHP}$$



"triple pendulum on \Rightarrow cart"