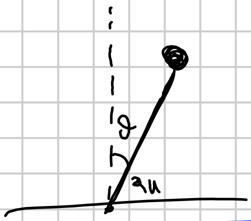


$$x = \begin{bmatrix} \vartheta \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}x(t) = \underbrace{A}_{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g/l & 0 \end{bmatrix}} x(t) + \underbrace{B}_{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} u(t)}$$

È possibile scegliere

$$u(t) = Fx(t) = [f_1 \;\; f_2]\, x(t)$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = (A + BF)\,x(t) \qquad \text{"closed loop system"}$$

in modo che questo sist. sia stabile, cioè $\Lambda(A+BF) \subseteq LHP$

Equazione del calore:

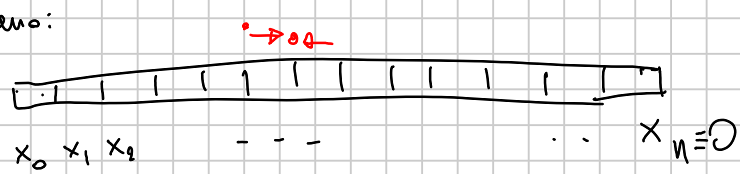
quantità di calore $Q \sim$ Temperatura T (materiale costante)

Variabile: temperatura $x(y, t)$

posizione → y, t tempo.

$$\frac{\partial}{\partial t}x(y,t) = \underset{\text{costante}}{\alpha}\, \frac{\partial^2}{\partial y^2}x(y,t) \qquad x(0,t) = u(t) \qquad x(1,t) = 0$$

Discretizziamo:

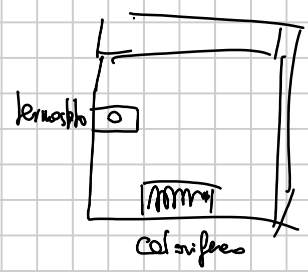


$$x_i(t) = x(ih, t) \qquad i = 0, 1, \dots n-1$$

$$\frac{\partial}{\partial t} x(t) = \alpha \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\ell^2} \qquad i = 1, 2, \dots, n-1 \qquad x_0(t) = u(t)$$

$$(x_{i+1} - x_i) + (x_{i-1} - x_i)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{\alpha}{\ell^2} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \\ & 1 & -2 & 1 \\ & & \ddots & \ddots \\ & & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$



$$\boxed{\frac{d}{dt} x(t) = A x(t) + B u(t)}$$

[Datta, Cap. 5] Circuiti RLC, eccetera

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad A \in \mathbb{R}^{n \times n} \qquad B \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$x \in C^1_{\text{tratti}}([0, \infty), \mathbb{R})$$

$$u \in C^0_{\text{tratti}}([0, \infty), \mathbb{R})$$

È sempre possibile scegliere $u(t) = F x(t)$ (o anche in generale $u(t)$) in modo che il sistema sia stabile ($\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$)

No! Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x_1 = A_{11} x_1 + A_{12} x_2 + B_1 u \\ \frac{d}{dt} x_2 = A_{22} x_2 \end{cases}$$

non posso cambiare la dinamica! Se $x_2(t)$ non tende a 0, non ci posso fare nulla!

Potrei avere la stessa cosa nascosta dietro un cambiamento di base:

$$\hat{x} = Kx$$

$$\frac{d}{dt}\hat{x} = KAK^{-1}\hat{x} + KBu$$

Quindi, se

$$A = K\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22}\end{bmatrix}K^{-1}, \quad B = K\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

per qualche $K \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile,

allora il sistema non è controllabile.

Come vedo se questo è il caso? Spazi di Krylov!

Def: La coppia (A,B) si dice controllabile se

$$K(A,B) := \operatorname{span}\left(\left[B \;\; AB \;\; A^2B \;\; A^3B \;\cdots\; A^{n-1}B\right]\right) = \mathbb{R}^n$$

? ~~all'infinito~~

Mi basta fermare la successione a $A^{n-1}B$, perché

A^n è una comb. lineare di $A^{n-1}, A^{n-2}, \dots A, I$ (Cayley-Hamilton, $p(A)=0$ dove p è il pol. caratteristico)

$$A^nB = \alpha_{n-1}A^{n-1}B + \dots + \alpha_1 AB + \alpha_0 B$$

Lemma: Esiste $K \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile tale che

$$K^{-1}AK = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22}\end{bmatrix}, \quad K^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(con $A_{11} \in \mathbb{R}^{n_1\times n_1}$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times m}$ $n_2 \neq 0$) se e solo se (A,B) non è controllabile ($\Leftrightarrow \operatorname{span}([B, AB, \dots A^{n-1}B]) \neq \mathbb{R}^n$)

Dim:

$\Rightarrow$) scrivo $K = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} n_1 & n_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \end{array}$, allora

$$A^jB = K\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22}\end{bmatrix}^j K^{-1}K\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11}^j & * \\ 0 & A_{22}^j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11}^jB_1 \\ 0 \end{bmatrix} = K_1 A_{11}^jB_1$$

Quindi per ogni $j \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Im} A^jB \subseteq \operatorname{Im} K_1$

$\Rightarrow \operatorname{Im}\left(\left[B, AB, \dots A^{n-1}B\right]\right) \subseteq \operatorname{Im} K_1$ e ha dimensione $n_1 < n$

$\Leftarrow$) Ora supponiamo $\operatorname{Im}\left(\left[B, AB, \dots A^{n-1}B\right]\right) = \operatorname{Im} K_1$,

per un certo $K_1 \in \mathbb{R}^{n \times n_1}$ con colonne lin. ind.

Completiamo K_1 a $K = [K_1 \; K_2]$ invertibile.

Allora,

$K^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ vero perché le colonne di B sono comb. lin. delle sole colonne di K_1

$B = [K_1 \; K_2]\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$K^{-1}AK = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$ vero perché $\operatorname{Im} K_1$ è un sottosp. invariante per A:

$v \in K_1 \Rightarrow Av \in \operatorname{Im} K_1$:

se v è comb. lin. di $B, AB, \dots A^{n-1}B, \dots$,

allora anche Av lo è.

$AK = A[K_1 \, K_2] = [\underbrace{AK_1}_{\text{le colonne in } K_1} \;\; AK_2]$ $\qquad K^{-1}AK = \underbrace{K^{-1}AK_1}_{= \begin{bmatrix} A_{11} \\ 0 \end{bmatrix}}, K^{-1}AK_2.$ $\square$

<u>Nota</u>:

$\operatorname{Im} K_1$ è il più piccolo sottosp. A-invariante che contiene B.

Difatti, se $\operatorname{Im} B \subset U$ A-invariante, allora $\operatorname{Im} AB \subset U$, $\operatorname{Im} A^2B \subset U, \dots$

$\Rightarrow \operatorname{Im}[B, AB, \dots A^kB \dots] \subseteq U.$

U è il sottospazio che avete come $\operatorname{Im} V_k$ quando avete breakdown in Arnoldi

---

<u>KALMAN decomposition</u>:

Per ogni coppia $(A, B) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m}$, c'è un cambio di base K t.c.

$$K^{-1}AK = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \quad K^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(potremmo avere $n_2 = 0$, se (A, B) già controllabile)

e (A_{11}, B_1) controllabile

Dim: prendo $K = [K_1 \; K_2]$ come sopra (K_1 base di $\operatorname{Im}(B, AB, A^2B, \dots)$)

e $\mathrm{span}(B, AB, A^2B, \dots) = \mathrm{span}(K_1B_1, K_1A_{11}B_1, K_1A_{11}^2B_1, \dots)$

$= \mathrm{Im}\, K_1$

$= K_1 \underbrace{\mathrm{span}(B_1, A_{11}B_{11}, A_{11}^2B_1, \dots)}_{= \mathbb{R}^{n_1}}$

Altri criteri equivalenti:

~~Popov~~ (or ~~Hautus~~) test: $\quad n \times (n+m)$

(A,B) controllabile $\iff \mathrm{rank}[A - zI, B] = n$ per ogni $z \in \Lambda(A)$

$\iff \mathrm{rank}[A - zI, B] = n$ per ogni $z \in \mathbb{C}$

(i due a dx sono equivalenti tra loro perché se $z \notin \Lambda(A)$, allora $\mathrm{rk}(A - zI) = n$)

dim: $\Leftarrow$ Supponiamo (A,B) non controllabile: allora (nella base della Kalman dec.)

$$[A - zI \;\; B] = \begin{bmatrix} A_{11} - zI & A_{12} & B_1 \\ 0 & A_{22} - zI & 0 \end{bmatrix}$$

e se prendo $z \in \Lambda(A_{22})$ il secondo blocco di righe non è lin. ind.

$\Rightarrow$ Supponiamo che per un qualche $z \in \Lambda(A)$ $\mathrm{rank}[A - zI, B] < n$

Allora, esiste $v \neq 0$ t.c. $v^* [A - zI, B] = 0$.

A meno di cambi di base, posso supporre $v^* = [0\ 0\ \cdots\ 1]$.

Allora questo vuol dire che

$$[A - zI, B] = \left[\begin{array}{c|c|c} A_{11} - zI & A_{12} & B_1 \\ \hline 0\ 0 \cdots & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

con l'ultimo blocco di dim. 1.

Altro criterio:

(A,B) controllabile $\iff \underbrace{\int_0^t \underbrace{e^{\tau A} BB^* e^{\tau A^*}}_{\geq 0} d\tau}_{W :=} > 0$ per qualche $t > 0$

$$\iff \int_0^t e^{\tau A} B B^* e^{\tau A^*} d\tau \succ 0 \quad \text{per } \underline{\text{ogni}} \ t > 0.$$

<u>dim:</u>

$\Leftarrow$ Se (A,B) non controllabile, allora $\operatorname{Im} A^j B \subseteq \operatorname{Im} M_1$ per ogni j

Ma allora anche $\operatorname{Im} e^{\tau A} B \subseteq \operatorname{Im} M_1$ (perché $e^{\tau A}$ è una funzione di matrice, e si scrive come comb. lin. degli A^j)

Allora, per ogni t $\operatorname{Im} \int_0^t \underbrace{e^{\tau A} B}B^* e^{\tau A^*} d\tau \subseteq \operatorname{Im} M_1$, e quindi non potrà essere invertibile.

$\Rightarrow$ Supponete che esista $v \neq 0$ t.c. $v^* W v = 0$

$$0 = \int_0^t \underbrace{v^* e^{\tau A} B B^* e^{\tau A^*} v}_{\Phi(\tau)\Phi(\tau)^*} d\tau \Rightarrow \Phi(\tau) = v^* e^{\tau A} B \equiv 0 \text{ per ogni } \tau \in [0,t]$$

Allora,
$$\Phi(0) = v^* B = 0$$
$$\Phi'(0) = v^* A B = 0 \qquad \Rightarrow v^* [B \ AB \ A^2B \ \cdots] = 0$$
$$\Phi''(0) = v^* A^2 B = 0 \qquad \Rightarrow \operatorname{Im}[B, AB, A^2B] \neq \mathbb{R}^n$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$\square$

In particolare, $\underset{\Lambda(A) \subseteq LHP}{(A,B) \text{ controllabile}} \iff W = \int_0^\infty e^{A\tau} B B^* e^{\tau A^*} d\tau \succ 0$

e questo è la soluzione di

$$A W + W A^* + B B^* = 0$$

("Controllability Gramian")

<u>Teo:</u> (A,B) controllabile se e solo se per ogni $x_F \in \mathbb{R}^n$, $t_F \in \mathbb{R}$

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \qquad x(0) = x_0$$

riuscite a scegliere un controllo $u(t)$ tale che $x(t_F) = x_F$

<u>Dim:</u> Ricordiamo formula per risolvere eq. diff. lineari

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)\,d\tau.$$

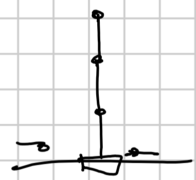
$\Rightarrow$ se (A,B) non è controllabile, allora $x(t) - e^{tA}x_0 \subseteq \mathrm{Im}\, M_1$ e non tutto $\mathbb{R}^n$

$\Leftarrow$ $u(\tau) = B^* e^{(t_F-\tau)A^*} y$ per un certo y fissato

$$x(t_F) = e^{t_FA}x_0 + \left(\int_0^{t_F} e^{(t_F-\tau)A}\underbrace{BB^*}_{W}e^{(t_F-\tau)A^*}d\tau\right) y$$

$$= e^{t_FA}x_0 + Wy$$

e sapete che $W > 0$ è non sing. quando (A,B) è controllabile.



Condizione un pochino più debole della controllabilità: <u>stabilizzabilità</u>:

una coppia (A,B), che scriviamo nella forma

$$M\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ 0 & A_{22}\end{bmatrix}M^{-1}, \quad M\begin{bmatrix}B_1\\ 0\end{bmatrix}$$

con (A_{11}, B_1) controllabile

si dice <u>stabilizzabile</u> se $\Lambda(A_{22}) \subseteq LHP$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u \\ \frac{d}{dt}x_2 = A_{22}x_2 \end{cases}$$

$\rightarrow$ posso fargli raggiungere qualunque stato

$\rightarrow$ non posso modificare la sua dinamica

se è già stabile di suo, cioè $\Lambda(A_{22}) \subset LHP$, allora $x_2 \to 0$,

e scegliendo u opportunamente riesco a ottenere $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$

Popov test:

(A,B) stabilizz. $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{rank}[A - zI, B] = n$ per ogni $z \notin LHP$