Note Title 2020-05-08

Def $(A,B) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times B^{n\times m}$ controllabile se (equivalentemente) [Datta, Ch.6]

$\rightsquigarrow$ 1) $\operatorname{span}\left[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B\right] = \mathbb{R}^n$

$\rightsquigarrow$ 2) $\nexists$ decomp. $A = M\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22}\end{bmatrix}M^{-1}$, $B = M\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (con 2° blocco non banale)

$\rightsquigarrow$ 3) $\operatorname{rk}\left[A - zI, B\right] = n \quad \forall z \in \mathbb{C}$ (o per $z \in \Lambda(A)$)

$\rightsquigarrow$ 4) $W = \int_0^t e^{\tau A} B B^* e^{\tau A^*} d\tau \succ 0$ per (uno o tutti) $t > 0$

Se (A,B) controllabile, allora posso trovare

F t.c. $\Lambda(A+BF) \subset LHP \Rightarrow$ esiste $u(t) = Fx(t)$ t.c.

$\dot{x} = Ax + Bu = (A+BF)x$ è stabile per ogni x_0 $(x \to 0)$

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1 u$$
$$\dot{x}_2 = \underbrace{A_{22}}x_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} A_{11} - zI & A_{12} & B_1 \\ 0 & A_{22} - zI & 0 \end{array}\right]$$

singolare se $z \in \Lambda(A_{22})$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La soluzione di $AW + WA^* + BB^* = 0$ è

$$W = \int_0^\infty e^{\tau A} BB^* e^{\tau A^*} d\tau \quad (\text{se } \Lambda(A) \subset LHP)$$

Al posto di A, posso considerare $A-kI$ per un qualunque $k>0$

Che effetto ha sulla controllabilità?

$$K(A-kI,B)=\text{span}\Big[B,\ \underbrace{(A-kI)B}_{AB-kB},\ \underbrace{(A-kI)^2B}_{A^2B-2kAB+k^2B},\ \dots\Big]\subset \underbrace{\text{span}\big[B,AB,A^2B,\dots\big]}_{K(A,B)}$$

$$\Rightarrow K(A-kI,B)\subset K(A,B).$$

E anche $K(A,B)\subset K(A-kI,B)$ (mi basta ripetere la dimostrazione
$A\longrightarrow A-kI$
$k\longrightarrow -k$)

Quindi, $K(A-kI,B)=K(A,B)$.

Uno è uguale a $\mathbb{R}^n$ se anche l'altro è uguale a $\mathbb{R}^n$

Cioè, $\boxed{(A-kI,B)\text{ controllabile}\iff(A,B)\text{ controllabile}}$

In particolare, invece di testare se (A,B) controllabile, posso testare se $(A-\alpha I,B)$ controllabile per α opportuno.

Scelgo α t.c. $\Lambda(A-\alpha I)\subset LHP$

Risolvo $(A-\alpha I)W+W(A-\alpha I)^*+BB^*=0$, per ottenere

$$W=\int_0^\infty e^{\tau(A-\alpha I)}BB^*e^{\tau(A-\alpha I)^*}d\tau,$$

e $(A-\alpha I,B)$ controllabile $\iff W\succ 0$

$\Updownarrow$

(A,B) controllabile

Modo alternativo di risolvere $(A-\alpha I)W+W(A-\alpha I)^*+BB^*=0$:

vettorizzando.

$$\text{vec}(MXN)=(N^T\otimes M)\,\text{vec}(X)$$

$$\left(I\otimes(A-\alpha I) + \overbrace{(A-\alpha I)^{*T}}^{\overline{A-\alpha I}} \otimes I \right) \operatorname{vec} W = -\operatorname{vec}(BB^*) \leftarrow O(n^6)$$

$$I\otimes Z = \begin{bmatrix} Z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z \end{bmatrix} \qquad Z\otimes I = \begin{bmatrix} z_{11}I & z_{12}I & z_{13}I & \cdots & z_{15}I \\ z_{21}I & \ddots & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ z_{51}I & \cdots & & & z_{55}I \end{bmatrix}$$

Nota:
Il criterio basato sull'eq. di Lyapunov ((A,B) controllabile $\iff AW+WA^*+BB^*=0$ ha una sol. $W>0$) ha un'interpretazione fisica:

Se io voglio trovare un controllo $u(t)$ tale che

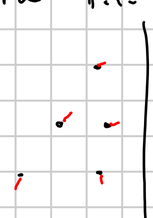
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t)+Bu(t) \\ x(0)=x_0 \end{cases} \quad \text{raggiunga } x(t_F)=0,$$

allora $$\int_0^{t_F} \|u(t)\|^2\,dt \geq x_0^* W^{-1} x_0$$

Cioè: $x_0^* W^{-1} x_0$ è la "quantità di energia" che mi serve per controllare il sistema.

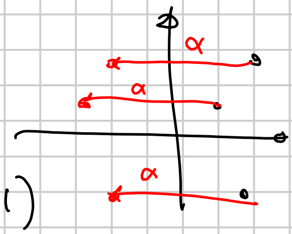
Se so che (A,B) controllabile, come faccio a calcolare F t.c. $\Lambda(A+BF)\subset LHP$? $u(t)=Fx(t)$ t.c. $x(t)$ stabile.

Oss: F non è unica, anzi tipicamente ce ne sono infinite.
(Se ne avete trovata una, esisterà un suo intorno t.c. ogni matrice $\tilde{F}$ nell'intorno ha $\Lambda(A+B\tilde{F})\subset LHP$)



Bass algorithm:

Se α è sufficientemente grande, $-A-\alpha I$ ha tutti gli autoval. nel LHP (basta $\alpha > \rho(A)$)



Allora, l'eq. di Lyapunov

$$+(A+\alpha I)W + W(A+\alpha I)^* - 2BB^* = 0 \qquad (1)$$

Poiché $-A-\alpha I$ è stabile e $(-A-\alpha I, B)$ è controllabile,

$$\Updownarrow$$

(A,B) controllabile

allora $W \succ 0$.

$$\underbrace{(A-BB^*W^{-1})}_{\hat{A}}W + \underbrace{W(A-BB^*W^{-1})^*}_{=WA^*-WW^{-1}BB^*} + \underbrace{2\alpha W}_{\hat{Q}} = 0 \qquad (2)$$

$$\hat{A}W + W\hat{A}^* + \hat{Q} = 0$$

Questa equazione (2) è equivalente alla (1).

È un'equazione di Lyapunov con la matrice $A-BB^*W^{-1} = \hat{A}$

È tale che $\hat{Q} \succ 0$ e ha sol. $W \succ 0$ $\Rightarrow \Lambda(A-BB^*W^{-1}) \subset LHP$

$\Rightarrow$ $F = -B^*W^{-1}$ è tale che $\Lambda(A+BF) \subset LHP$

Riassumendo, Bass algorithm: Dato (A,B) controllabile,

1) Scelgo $\alpha > \rho(A)$
2) Risolvo (1) $\quad -(A+\alpha I)W - W(A+\alpha I)^* + 2BB^* = 0$
3) Prendo $F = -B^*W^{-1}$.

(Fatto: Se (A,B) controllabile, dati n numeri ~~complessi~~ (reali o coppie complesse coniugate) a nostra scelta, riesco a trovare $F \in \mathbb{C}^n$ tale che $\Lambda(A+BF) = \{$quei n complessi$\}$)

$F \in \mathbb{R}^n$

(C'è un capitolo del libro di Datta su questi algoritmi)

Esiste una F "migliore delle altre"?

Una possibile risposta:

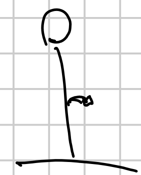
Linear-quadratic optimal control:

<u>Problema</u>: trova F $\left(\text{e } u(t)=Fx(t)\right)$ tali che sia minimo

$$(*) \qquad E = \int_0^\infty \underbrace{x(t)^* Q x(t)}_{x \text{ piccolo}} + \underbrace{u^*(t) R u(t)}_{u \text{ piccolo}} \, dt$$

$$\left(\text{se } Q=I,\ R=I \quad \int_0^\infty \left(\|x\|^2 + \|u\|^2\right) dt\right)$$

con le condizioni $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$



per due matrici $\cancel{R \succeq 0}$, $Q \succeq 0$ date

<u>Assunzione</u>: $R \succ 0$: il controllo ha sempre un costo

(altrimenti il problema è più complicato tecnicamente)

Giochino standard di calcolo delle variazioni: prendo $x_*(t)$ $u_*(t)$ ottimali; li perturbo, $x_*(t) + \varepsilon y(t)$, $u_*(t) + \varepsilon v(t)$,

e ottengo $E(\varepsilon)$, allora $\frac{d}{d\varepsilon} E(\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} = 0$

Si riesce a dimostrare (non lo facciamo qui) che vale:

una coppia di funzioni $u(t)$, $x(t)$ risolve $(*)$ se e solo se esiste $\mu(t)$ ("moltiplicatore di Lagrange") tale che

$u \in C^0_{\text{tratti}}([0,\infty), \mathbb{R}^m)$

$x, \mu \in C^1_{\text{tratti}}([0,\infty), \mathbb{R}^n)$

$$\to \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mu}(t) \\ \dot{x}(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix}}_{\dot{w}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & A & B \\ A^T & Q & 0 \\ B^T & 0 & R \end{bmatrix}}_{N} \underbrace{\begin{bmatrix} \mu(t) \\ x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}}_{w}$$

$x(0) = x_0$ $\qquad \lim_{t \to \infty} \begin{bmatrix} \mu(t) \\ x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = 0.$

<u>Oss. 1</u>: prima riga a blocchi: $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ (già lo sapevamo)

Oss 2: $\dot{u}(t)$ compare formalmente nel sistema, ma "si scontra sempre con degli zeri".

Oss. 3: sistema del tipo $M\dot{w}(t) = N w(t)$

Se M fosse stata invertibile, lo saprei risolvere:

$$\dot{w}(t) = M^{-1} N w(t) \quad , \qquad w(t) = \exp\left(t\, M^{-1} N\right) w_0$$

mi dà tutte le soluzioni (però: $\mu(0)$ e $u(0)$ non li so, e soprattutto M non è invertibile!)