Problema di controllo ottimo (lineare-quadratico)

Note Title 2020-05-14

Tra tutti i possibili controlli $u(t)$ per un sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad \lim_{t\to\infty} x(t) = 0, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad B \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

trovare quello che minimizza

$$\int_0^\infty x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t) \, dt \qquad Q \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad R \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

(per matrici $Q \succeq 0$ $R \succ 0$)

Teo: $Q \succeq 0$ $R \succ 0$, $G = BR^{-1}B^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Supponiamo di avere X tale che

1) $A^TX + XA + Q - XGX = 0$ (equazione di Riccati algebrica)

2) $A - GX = A - BR^{-1}B^TX$ ha tutti gli autoval. in LHP $\Lambda(A-GX) \subseteq LHP$

3) $X = X^T$

Allora, il valore ottimo di

$$\min \int_0^\infty x^TQx + u^TRu \, dt$$

$$\text{s.t. } \dot{x} = Ax + Bu, \quad \lim x \to 0, \quad x(0) = x_0$$

è $x_0^T X x_0$, ed è raggiunto da $u(t) = \underbrace{-RB^TX}_{F} x(t)$

dim:

$$\frac{d}{dt} x^TXx = \dot{x}^TXx + x^TX\dot{x} = (Ax+Bu)^TXx + x^TX(Ax+Bu)$$

$$= x^T(A^TX + XA)x + u^TB^TXx + x^TXBu$$

$$= x^T(\underbrace{XBR^{-1}B^T} - Q)x + \underbrace{u^TB^TXx} + \underbrace{x^TXBu} + u^TRu - u^TRu$$

$$= \underbrace{(u + R^{-1}B^TXx)^T R (u + R^{-1}B^TXx)}_{\geq 0} \underbrace{- x^TQx - u^TRu}_{\text{integrando}}$$

Integriamo da 0 a ∞

$$\int_0^\infty (x^TQx + u^TRu)\,dt = -x^TXx\Big|_0^\infty + \underbrace{\int_0^\infty (u+R^{-1}B^Tx)^T R (u + R^{-1}B^TXx)\,dt}_{\geq}$$

$= x_0^T X x_0 + $ roba positiva

$\Rightarrow$ il minimo è $x_0^T X x_0$ ed è raggiunto ponendo $u = -R^{-1}B^T X x$

Notiamo che questa è una scelta valida per u, perché con quella u, l'equazione diventa

$$\dot{x} = Ax - BR^{-1}B^T X x = (A - GX)\,x,$$

e in questa equazione $\lim x(t) \to 0$ perché $\Lambda(A-GX) \subset LHP$.

Controllo ottimale $\Leftrightarrow$ risolvere l'equazione $A^T X + XA + Q - XGX = 0$ (equazione di Riccati algebrica, ARE) (a tempo continuo, CARE)

ARE è equivalente a

$$\begin{bmatrix} A & -G \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}(A - GX) \iff \begin{cases} A - GX = A - GX \\ -Q - A^T X = X(A - GX) \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$\mathrm{Im}\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}$ è un sottosp. invariante di $\begin{bmatrix} A & -G \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$

associato agli autoval. $\Lambda(A-GX)$ (che sono un sottoins. degli autoval. di $\begin{bmatrix} A & -G \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$)

$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} A & -G \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ si chiama <u>Hamiltoniana</u> (non c'entra con quelle della fisica)

Vorremmo dimostrare un po' di fatti:

✓ 1) esiste esattamente <u>un</u> sotto spazio invariante $\mathcal{U}$ di $\mathcal{H}$ di dim. n tale che gli autoval. associati siano nel LHP

✓ 2) Questo sottosp. invariante ammette una base della forma $\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}$

3) $X = X^T$, e anzi $X \succeq 0$

---

1) è equivalente a dire che $\mathcal{H}$ ha <u>esattamente</u> n dei suoi $2n$ autovalori (contati con molteplicità) nel LHP.

(quindi $\mathcal{U} = \mathrm{Im}$(catene di Jordan con $\lambda \in LHP$) è l'unico sott. inv. di di dim. n con autovalori nel LHP).

Lo dimostriamo tramite una proprietà della matrice $\mathcal{H}$:

$\mathcal{H}$ soddisfa $\boxed{J\mathcal{H} = -\mathcal{H}^* J}$, con $J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -G \\ -Q & -A^* \end{bmatrix} \overset{?}{=} - \begin{bmatrix} A^* & -Q \\ -G & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -Q & -A^* \\ -A & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q & -A^* \\ -A & G \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{H}$ è anti-autoaggiunta rispetto al prod. scalare definito da J

$u, v \quad \langle u, v \rangle_J = u^* J v$

$\langle u, \mathcal{H} v \rangle_J = u^* J \mathcal{H} v = -u^* \mathcal{H}^* J v = \langle -\mathcal{H} u, v \rangle_J$

Le matrici che soddisfano questa proprietà si chiamano matrici Hamiltoniane

<u>Lemma</u>: se $\mathcal{H} v = \lambda v$ per $\mathcal{H}$ Hamiltoniana, allora

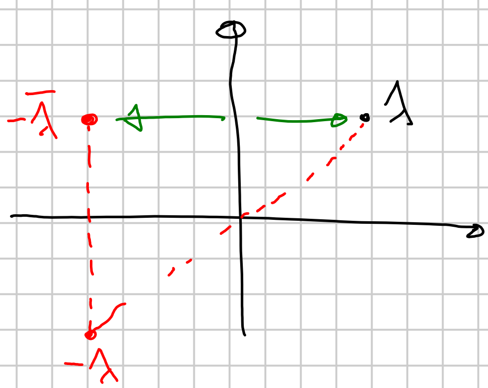
$$(v^* J)\mathcal{H} = -\bar{\lambda}(v^* J)$$

cioè, $v^* J$ è un autovett. sinistro di $\mathcal{H}$ con autovalore $-\bar{\lambda}$.

Difatti:

$$\mathcal{H} v = \lambda v \Rightarrow J\mathcal{H} v = \lambda J v \Rightarrow -\mathcal{H}^* J v = \lambda J v$$

$$\Rightarrow v^* J \bar{\lambda} = -v^* J \mathcal{H}.$$

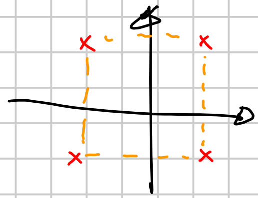


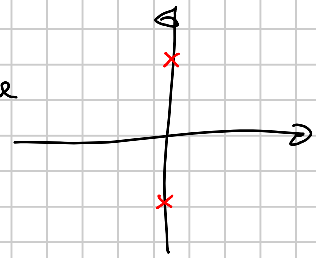
Se $\lambda \in \Lambda(\mathcal{H})$, allora $-\bar{\lambda}$, il suo simmetrico rispetto all'asse immag., è anche in $\Lambda(\mathcal{H})$

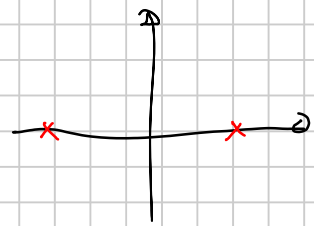
$\Rightarrow$ Gli autoval. di $\mathcal{H}$ formano un insieme simmetrico rispetto all'asse immaginario.

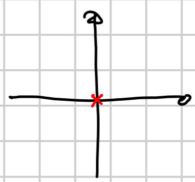
Se sappiamo che non c'è nessun autovalore sull'asse immaginario, allora posso concludere che $\mathcal{H}$ ha n autovalori $\in LHP$, $n \in RHP$.

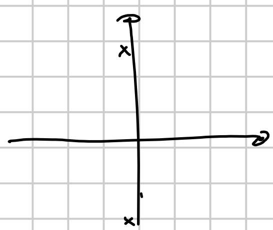
Strutture possibili nello spettro di $\mathcal{H}$ Hamiltoniana (reale)

1)  quadrupletta $\lambda, -\lambda, -\bar{\lambda}, \bar{\lambda}$

2) coppia immag. pure 

3) coppia reale pure 

4) zero: 

Matlab calcola , che sappiamo essere sbagliato perché non c'è una coppia simmetrica.

(Le stesse proprietà valgono anche per catene di Jordan: se $v_1, v_2, \dots v_k$ è una catena di Jordan associata a λ, allora $v_1^* J, v_2^* J, \dots v_k^* J$ è una catena di Jordan associata a $-\bar{\lambda}$; quindi queste simmetrie preservano anche le molteplicità)

Teo: supponiamo $Q \geq 0$, $G = BR^{-1}B^* \geq 0$ $[B \; AB \; A^2B]$

e che (A, B) controllabile (oppure stabilizzabile).

Allora, $\mathcal{H}$ non ha autoval. sull'asse immaginario

(quindi ne ha n nel LHP e n nel RHP, con molteplicità)

dim: supponiamo invece

(1) $$\begin{bmatrix} A & -G \\ -Q & -A^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = i\omega \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Allora

$$\underbrace{i\omega(\underbrace{z_2^* z_1 + z_1^* z_2}_{\text{Reale}})}_{\text{immag. pura}} = [z_2^* \quad z_1^*]\, i\omega \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = [z_2^* \quad z_1^*] \begin{bmatrix} A & -G \\ -Q & -A^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$= z_2^* A z_1 \underbrace{- z_2^* G z_2 - z_1^* Q z_1}_{\text{reale} \leq 0} - z_1^* A^* z_2$$

immag. pura

$\Rightarrow$ la parte reale del RHS $-z_2^* G z_2 - z_1^* Q z_1$ dev'essere 0

$\Rightarrow$ $\boxed{Qz_1 = 0}$ e $0 = z_2^* G z_2 = z_2^* B R^{-1} B^* z_2 \Rightarrow \boxed{z_2^* B = 0}$

Dalla relazione autoval-autovett (1), $-A^* z_2 = i\omega z_2$

ossia $\boxed{z_2^*(A + i\omega) = 0}$ $\Rightarrow$ $z_2^* [A + i\omega \;\; B] = 0$

che contraddice controll/stabilizz.

($[A - \lambda I, B]$ non ha rango pieno per $\lambda = -i\omega$). $\square$

$\Rightarrow$ Esiste un sottosp. invariante $\mathcal{U}$ di dim. n con autovalori CLHP.

$$\mathcal{U} = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} U_1^{-1} = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} I \\ \underbrace{U_2 U_1^{-1}}_{= X} \end{bmatrix}$$ se U_1 invertibile

se U_1 non invertibile, $\mathcal{U} = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$ non ha una base di quella forma (le parti di sopra dei vettori di $\mathcal{U}$ non spannano $\mathbb{R}^n$)

Teo: se (A, B) controllabile (o stabilizzabile), $Q \geq 0$ $G \geq 0$, $\mathcal{U} = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$ è il sottosp. inv. stabile, allora U_1 è invertibile.

dim: prendiamo v t.c. $U_1 v = 0$, $v \neq 0$

$$-v^* U_2^* G U_2 v = v^* \overbrace{[U_2^* \ -U_1^*]}^{0} \underbrace{\begin{bmatrix} A & -G \\ -Q & -A^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}(A-GX)} v = v^* [U_2^* \ -U_1^*] \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} (A-GX) v$$

$$= v^* \underbrace{(U_2^* U_1 - U_1^* U_2)}_{=0} (A-GX) v = 0$$

$$\Downarrow$$

$$B U_2 v = 0$$

$$\Downarrow$$

$$G U_2 v = 0$$

$$\begin{bmatrix} A & -G \\ -Q & -A^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} (A-GX) v$$

Il primo blocco è $0 = AU_1 v - GU_2 v = U_1 (A-GX) v$

Abbiamo dimostrato che $U_1 v = 0 \Rightarrow U_1 (A-GX) v = 0$

cioè $\operatorname{Ker} U$ è un sottosp. inv. per $A-GX$.

Se $\operatorname{Ker} U \neq 0$, allora posso trovare un autovettore w di $A-GX$ dentro questo sottospazio, cioè, w t.c. $U_1 w = 0$, $(A-GX) w = \lambda w$

$\lambda \in LHP$.

Secondo blocco (con $v = w$)

$$\cancel{-QU_1 w} - \underbrace{A^* U_2 w} = \underbrace{U_2 (A-GX) w} = \underbrace{\lambda U_2 w}$$

$$w^* U_2^* \begin{bmatrix} A + \lambda I & B \end{bmatrix} = 0$$ che contraddice controll./stabilizz. $\square$

<u>Teo</u>: se $Q \succeq 0$, $G \succeq 0$, (A,B) stabil., allora

1) $U_2^* U_1 - U_1^* U_2 = 0$
2) $X = U_2 U_1^{-1}$ è simmetrica
3) $X \geq 0$

<u>Dim</u>: se $\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \operatorname{span}$(autovettori e cat. Jordan di $\mathcal{H}$ con $\lambda \in LHP$), allora

$[U_1^* \ U_2^*] J = \operatorname{span}$(autovettori e cat. di Jordan sinistri di $\mathcal{H}$ con $\lambda \notin LHP$)

Autovettori destri e sinistri relativi ad autoval. distinti sono ortogonali.

(difatti $\mathcal{H}=VJV^{-1}$ $\qquad V^{-1}V = I$)

righe = autovett. sinistri $\uparrow$ $\quad$ $\uparrow$ colonne = autovett. destri

$$0 = \begin{bmatrix} U_1^* & U_2^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = U_1^* U_2 - U_2^* U_1$$

2) $X = U_2 U_1^{-1}$

$$0 = U_1^{-*}\left(U_1^* U_2 - U_2^* U_1\right)U_1^{-1} = U_2 U_1^{-1} - U_1^{-*} U_2^*$$
$$= \left(U_2 U_1^{-1}\right) - \left(U_2 U_1^{-1}\right)^* \quad \square$$

3) $A^* X + XA + Q - XGX = 0$

$$\underbrace{(A-GX)^* X}_{A^*X - XGX} + \underbrace{X(A-GX)}_{XA - XGX} + Q \pm XGX = 0$$

Quindi, X risolve $\hat{A}^* X + X\hat{A} + \hat{Q} = 0$, con $\hat{A} = A - GX$ $\quad \Lambda(\hat{A}) \subset LHP$

$\hat{Q} = Q + XGX \succeq 0$

$\Rightarrow X \succeq 0$ (proprietà eq. Lyapunov.)

Ricapitolando, se $Q \succeq 0$ $\quad R \succ 0$ (quindi $BR^{-1}B^* \succeq 0$)

e (A,B) stabilizz., allora

esiste unico $X = X^T \succeq 0$ tale che $\mathrm{span}\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}$ = sottosp. inv. stabile di $\mathcal{H}$

$$\begin{bmatrix} A & -G \\ -Q & -A^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}(A - GX) \qquad , \Lambda(A-GX) \subset LHP$$

e quindi X risolve ARE $\quad A^* X + XA + Q - XGX = 0. \quad \square$