Note Title 2020-05-15

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad \min \int_0^\infty x^T Q x + u^T R u \, dt$$

$$\lim_{t\to\infty} x_t = 0$$

$$\Updownarrow$$

Trovare X t.c. $\underbrace{A^* X + XA + Q - XGX = 0}_{\text{(ARE)}}$, $\quad \underbrace{\Lambda(A - GX) \subset LHP}_{\text{(soluz. stabilizzante)}}$

(esiste se (A,B) stabilizzabile, $Q \succcurlyeq 0$ $\quad G \succcurlyeq 0$)

$$\Updownarrow$$

Trovare sottosp. inv. stabile di $\mathcal{H} = \begin{bmatrix} A & -G \\ -Q & -A^* \end{bmatrix}$, difatti

$$\begin{bmatrix} A & -G \\ -Q & -A^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} (A - GX) \iff X \text{ soddisfa (ARE)}$$

Metodo di Newton per uno zero di

$$f: \begin{array}{ccc} \operatorname{vec} X & \longmapsto & \operatorname{vec}\big(\underbrace{A^* X + XA + Q - XGX}_{F(X)}\big) \\ \mathbb{R}^{n^2} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n^2} \end{array}$$

Cos'è $\operatorname{Jac}(f)$?

$$F(X+H) = A^*(X+H) + (X+H)A + Q - (X+H)G(X+H)$$

$$= F(X) + \underbrace{A^* H + HA - HGX - XGH}_{L_{F,X}(H)} + \underbrace{HGH}_{O(H^2)}$$

$$L_{F,X}[H] = H(A - GX) + (A - GX)^* H$$

$$\operatorname{Jac}(f) = I \otimes (A - GX)^* + (A - GX)^T \otimes I$$

Inverso di $L_{F,X}[H]$: dato Y t.c.

$$H(A-GX)+(A-GX)^*H=Y, \quad \text{trovare } H.$$

Eq. di Lyapunov nella variabile H

Risolubile se $\Lambda(A-GX)\cap\Lambda(-(A-GX)^*)=\emptyset$,

in part., se $\Lambda(A-GX)\subset LHP$, allora è risolubile

Metodo di Newton: in termini di vettori $x_k=\mathrm{vec}(X_k)$

$$x_{k+1}=x_k-J_{f,x_k}^{-1}f(x_k), \quad \text{ossia } x_{k+1}=x_k-h, \ h \text{ risolve } J_{f,x_k}\cdot h=f(x_k)$$

$$\left[\, n^2\times n^2 \,\right]\left[\, n^2 \,\right]=\left[\, n \,\right]$$

In termini di matrici,

$$X_{k+1}=X_k-H, \quad H \text{ risolve } \boxed{H(A-GX_k)+(A-GX_k)^*H=A^*X_k+X_kA+Q-X_kGX_k}$$

1 passo di Newton = 1 eq. di Lyapunov.

$$\boxed{\begin{array}{l}\underline{\text{Metodo}}: \ \text{per } k=0,1,2,\dots \\ 1)\ \text{Risolvi: } H(A-GX_k)+(A-GX_k)^*H=A^*X_k+X_kA+Q-X_kGX_k \\ 2)\ X_{k+1}=X_k-H\end{array}}$$

Formulaz. equivalente dell'eq. Lyapunov che fa un passo di Newton.

$$\boxed{X_{k+1}(A-GX_k)+(A-GX_k)^*X_{k+1}=-Q-X_kGX_k} \qquad (*)$$

$$\Updownarrow$$

$$(X_k-H)(A-GX_k)+(A^*-X_kG)(X_k-H)=-Q-X_kGX_k$$

$$\Updownarrow$$

$$-H(A-GX_k)-(A-GX_k)^*H=-Q\underbrace{-X_kGX_k}-X_kA\underbrace{+X_kGX_k}-A^*X_k\underbrace{+X_kGX_k}$$

$$=-Q-X_kA-A^*X_k+X_kGX_k$$

$\hookrightarrow \Lambda(A-GX_k) \subset LHP$, $\underbrace{Q + X_k G X_k \succeq 0}_{\text{vero sempre}}$ $\Rightarrow X_{k+1} \succeq 0$

$\Lambda(A-GX_0) \subset LHP \Rightarrow X_1 \succeq 0$

$Q, G \succeq 0$ (A,B) stab.

Teo: convergenza del metodo di Newton:

Supponiamo X_0 scelto t.c. $\Lambda(A-GX_0) \subset LHP$, allora

$$X_1 \succeq X_2 \succeq X_3 \succeq X_4 \succeq \dots \succeq X_k \succeq \dots \succeq X_*, \text{ e } X_k \to X_*,$$

dove X_* è la sol. stabilizzante di (ARE)

⚠ dim: induzione noiosa con propr. di eq. di Lyapunov.

$$(X_k - X_{k+1})(A-GX_k) + (A-GX_k)^*(X_k - X_{k+1}) = -(X_k - X_{k-1})G(X_k - X_{k-1}).$$

(deriva dalla $(*)$ e dalla $(*)$ con gli indici spostati di 1) $k \geq 1$

$\Rightarrow \Lambda(A-GX_k) \subset LHP \Rightarrow X_k - X_{k+1} \succeq 0$ $k \geq 1$

$$(X_* - X_{k+1})(A-GX_k) + (A-GX_k)^*(X_* - X_{k+1}) = -(X_* - X_k)G(X_* - X_k)$$

$k \geq 0$

$\Rightarrow X_* - X_{k+1} \succeq 0$

Alg:

Dati A, G, Q, usiamo l'algoritmo di Bass per trovare X_0 tale che $\Lambda(A-GX_0) \subset LHP$ e poi

for $k=1,2,\dots$

- Calcolo H risolvendo $(*)$ $(A-GX)^*H + H(A-GX) = A^*X_k + X_k A + Q - X_k G X_k$
- $X \leftarrow X - H$

end

Costo computaz? Ad ogni passo, mi serve $\mathrm{schur}(A-GX_k)$ $\sim 30n^3$

(difetto: costo abbastanza alto).

"Iterative refinement": dato $\tilde{X}$ vicino alla soluzione, posso fare un passo di Newton per trovare $\hat{X}$ più vicino.

Altro metodo: troviamo un sott. inv. della Hamiltoniana $\mathcal{H} = \begin{bmatrix} A & -G \\ -Q & -A^* \end{bmatrix}$.

Idea: se ho una fatt. di Schur $\mathcal{H} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}^*$,

allora, span $\begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{21} \end{bmatrix}$ è invariante: $\mathcal{H} \begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{21} \end{bmatrix} T_{11}$

Ci serve un sott. inv. particolare: quello con $\Lambda(T_{11}) \subset LHP$; dobbiamo riordinare fatt. di Schur.

Se $\begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{21} \end{bmatrix}$ base dell sott. inv. stabile, allora $\begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{21} \end{bmatrix} Q_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} I \\ Q_{21}Q_{11}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}$

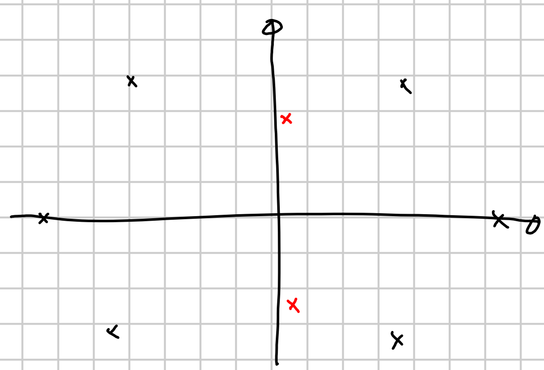
è un'altra base $\Rightarrow \boxed{X = Q_{21}Q_{11}^{-1}}$ (che, magicamente, risulta essere simmetrica)

La fatt. di Schur (anche riordinata) è basata su trasf. ortogonali $\Rightarrow$ stabile all'indietro $\Rightarrow$ il sott. $\begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{21} \end{bmatrix}$ che calcola è il sott. inv. stabile esatto di una piccola perturbazione $H + \delta H$ $\left(\frac{\|\delta H\|}{\|H\|} = O(u) \right)$.

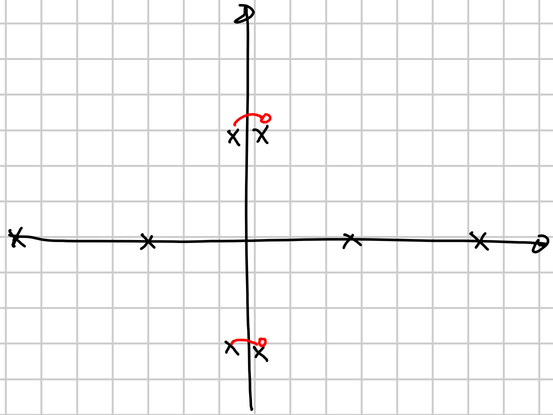
Sarebbe bello avere algoritmi stabili all'indietro in modo strutturato, cioè $\begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{22} \end{bmatrix}$ che calcoliamo è il sott. inv. stabile esatto di una piccola pert. $H + \delta H$, dove $H + \delta H$ è anche lei Hamiltoniana.

(La fatt. di Schur non ci assicura che la pert. sia Hamiltoniana)

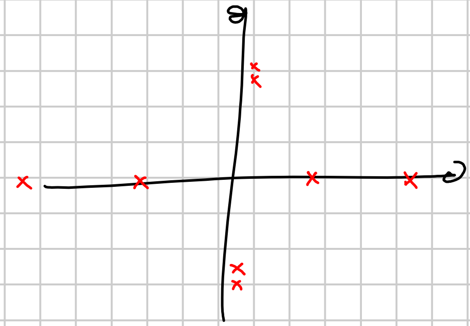
(Gli autoval. calcolati non rispettano necessariamente la simmetria rispetto all'asse immaginario)



eig(corex(14))



oppure



?

non riusciamo più a prendere il sott. inv. corretto!

Come si risolve il problema?

Con trasformaz. ortogonali che preservano strutt. Hamiltoniana

Hamilt. $\Leftrightarrow$ antisimm. rispetto $J=\begin{bmatrix}0 & I_n\\ -I_n & 0\end{bmatrix}$, i.e. $-H^*J = JH$

$S^{-1}HS$ resta Hamiltoniana se S è simplettica, cioè, ortogonale rispetto al prodotto scalare J:

$$\langle u,v\rangle_J = u^* J v \quad \forall u,v$$

$$\shortparallel$$

$$\langle Su,Sv\rangle_J = u^* S^* J S v \quad \Leftarrow \quad \boxed{S^*JS=J}$$

Si definiscono matrici simplettiche le $S\in\mathbb{R}^{2n\times 2n}$ t.c. $S^*JS=J$

Teo: se H Hamilt., S simplettica $\Rightarrow$ $S^{-1}HS$ Hamiltoniana

$$-H^*J=JH, \quad J=S^*JS \quad \Rightarrow \boxed{-S^*H^*S^{-*}J \overset{?}{=} JS^{-1}HS}$$

(dim: vediamo la prossima sett.)

Vogliamo fare trasformazioni che sono simplettiche e ortogonali,

$$S^*JS=J, \quad S^*S=I$$

Per esempio: data $Q\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonale,

$$S=\begin{bmatrix}Q & 0\\ 0 & Q\end{bmatrix} \text{ è ortosimplettica}$$

oppure,

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} k & n+k \end{array} \\ \begin{array}{c} k \\ \\ n+k \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} \ddots\; c \;\ddots & -s \\ \hline s & \ddots\; c \;\ddots \end{array}\right] \end{array}$$

Givens$([k, n+k], \alpha)$.

Laub trick: supponiamo di avere calcolato una forma di Schur

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix}$$ forma di Schur di H ordinata ($\Lambda(T_{11}) \subset LHP$).

Allora, $\operatorname{span}\begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{21} \end{bmatrix}$ = sottosp. inv. stabile.

Avevamo visto che $\operatorname{span}\left(J\begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{21} \end{bmatrix}\right)$ = sott. inv. sinistro antistabile

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{21} \\ -Q_{11} \end{bmatrix}$$ ortogonale a $\begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{21} \end{bmatrix}$

$$S = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{21} \\ Q_{21} & -Q_{11} \end{bmatrix}$$ è ortogonale e simplettica