Note Title 2020-05-21

Metodo di Schur.

1) Calcola forma di Schur di $\mathcal{H} = \begin{bmatrix} A & -G \\ -Q & -A^* \end{bmatrix}$

del tipo $\mathcal{H} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix} Q^*$

ordinata con $\Lambda(T_{11}) \subset LHP$

2) $\begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{21} \end{bmatrix}$ sono una base del sott. inv. stabile e $X = Q_{21} Q_{11}^{-1}$

Stabile all'indietro: errore a ogni passo, ad es. $M_{k+1} = Q_k^T M_k Q_k$

$$\hat{M}_k = Q_k^T \hat{M}_k Q_k + \underbrace{\Delta M_k}_{\text{errore locale}} \qquad M_0, M_1, M_2, \dots$$

errore locale corrisponde a una perturbaz. di M_0 pari a $Q_1 \cdots Q_{k-1} Q_k \Delta M_k Q_k^T Q_{k-1}^T \cdots Q_1^T$ e quindi di norma piccola.

$\Rightarrow$ il metodo di Schur produce un sott. inv. stabile di $\mathcal{H} + \Delta\mathcal{H}$, con $\Delta\mathcal{H}$ piccolo.

$\Delta\mathcal{H}$ non ha la stessa struttura di $\mathcal{H}$ $\quad (-\mathcal{H}^* J = J\mathcal{H})$

$\Rightarrow$ gli autoval. non hanno la stessa simmetria, potrebbero non essere divisi $n:n$ dall'asse immaginario

---

Vorremmo lavorare con trasf. ortogonali + simplettiche

S simplettica se ortogonale risp. a $\langle u, v \rangle_J = u^* J v$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$$

Lemma: $\mathcal{H}$ Hamiltoniana, S simplettica $\Rightarrow$ $S^{-1}\mathcal{H}S$ Hamiltoniana

Hamilton: $-u^* \mathcal{H}^* J v = \langle -\mathcal{H}u, v\rangle_J = \langle u, \mathcal{H} v\rangle_J = u^* J \mathcal{H} v$

$$\Updownarrow$$

$$-\mathcal{H}^* J = J\mathcal{H}$$

simplettica: $S^* J S = J$

Voglio mostrare che

$$-(S^{-1}\mathcal{H}S)^* \boxed{J} \overset{?}{=} \boxed{J}\, S^{-1}\mathcal{H} S$$

$$-\cancel{S^*}\mathcal{H}^* \cancel{S^{-*}} \cancel{S^*} J \cancel{S} \overset{?}{=} \cancel{S^*} J \cancel{S} \cancel{S^{-1}} \mathcal{H} \cancel{S} \qquad -\mathcal{H}^* J \overset{\checkmark}{=} J\mathcal{H}.$$

⚠ Simplettico $\not\Rightarrow$ $\|v\| = \|Sv\|$

"Trucco di Laub": se (Q,T) forma di Schur ordinata che risolve il problema,

1) $\begin{bmatrix}Q_{11}\\Q_{21}\end{bmatrix}$ ha colonne ortonormali $\Rightarrow Q_{11}^*Q_{11} + Q_{21}^*Q_{21} = I$

2) $Q_{21}^*Q_{11} - Q_{11}^*Q_{21} = 0$ ($\Leftrightarrow$ $J\begin{bmatrix}Q_{11}\\Q_{21}\end{bmatrix}$ spanna degli autovettori dx ortogonali a $\begin{bmatrix}Q_{11}\\Q_{21}\end{bmatrix}$)

$$\Rightarrow V = \begin{bmatrix} Q_{11} & -Q_{21} \\ Q_{21} & Q_{11} \end{bmatrix}$$ è ortogonale + simplettica:

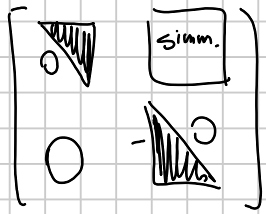
$$V^*V = \begin{bmatrix} Q_{11}^* & Q_{21}^* \\ -Q_{21}^* & Q_{11}^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_{11} & -Q_{21} \\ Q_{21} & Q_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$V^*JV = \underbrace{\begin{bmatrix} Q_{11}^* & Q_{21}^* \\ -Q_{21}^* & Q_{11}^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} Q_{11} & -Q_{21} \\ Q_{21} & Q_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q_{21}^* & Q_{11}^* \\ -Q_{11}^* & -Q_{21}^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_{11} & -Q_{21} \\ Q_{21} & Q_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}.$$

$$V^*\mathcal{H}V = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & -R_{11}^* \end{bmatrix}$$

R_{11} triang. sup.

R_{12} simmetrico

 deve essere Hamiltoniana, perché $V^T \mathcal{H} V$

$\Rightarrow$ esiste una V ortosimplettica che "risolve il problema".

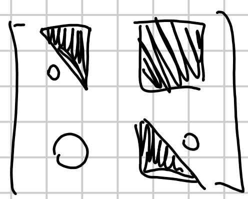
Vorrei calcolarla senza passare dalla forma di Schur non-strutturata.

Difficile calcolarla solo con cambi di base ortosimplettici

Problema: non esiste per tutte le $\mathcal{H}$ Hamiltoniane

Problema poi aggirato con una scomposizione diversa [Chu-Liu-Mehrmann]

$$\mathcal{H} = URV^T, \quad U, V \text{ ortosimplettiche},$$

$R =$ 

(R non è Hamiltoniana, in generale)

Idea per calcolarlo: usiamo due tipi di trasf. ortosimplettiche:

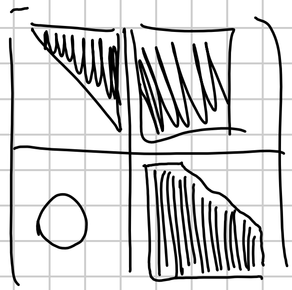
1) $S = \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix}$ $\quad$ H ortogonale di Householder

2) $S = \begin{array}{c} \\ k \\ \\ \\ k \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & c & & & -s & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & 1 & & \\ & s & & & c & \\ & & & & & 1 \end{array}\right]$ $\quad$ (Givens su entrate k, $n+k$)

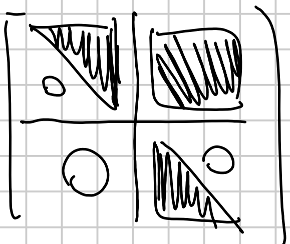
$$\mathcal{H} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \hline \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \end{array}\right] \xrightarrow[\text{per (1)}]{\text{molt. a sx}} S_1\mathcal{H} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \hline \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times \end{array}\right] \xrightarrow[\text{per (2)}]{\text{molt. a sx}} S_2S_1\mathcal{H} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \hline 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\ \hline 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times \end{array}\right] \xrightarrow{\text{molt. a dx per (1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\ \hline 0 & 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times \end{array}\right] \xrightarrow{\text{dx Givens}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\ \hline 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\ \hline 0 & 0 & 0 & \times & \times & 0 \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times \end{array}\right] \xrightarrow{\text{continuando in modo simile}} \left[\begin{array}{c|c} \text{Triang.} & \text{generica} \\ \hline 0 & \text{Hessenberg} \end{array}\right]$$



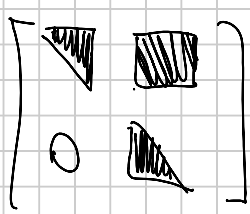
Facendo trasformaz. successive "stile QR", si riesce a ottenere

U  $V^T = \mathcal{H}$

$$-\mathcal{H}^* J = J\mathcal{H}$$

$$U \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix} V^T = \mathcal{H} = V \begin{bmatrix} -R_{22}^T & R_{12}^T \\ 0 & -R_{11}^T \end{bmatrix} U^T$$

$$\mathcal{H}^2 = U \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix} V^T V \begin{bmatrix} -R_{22}^T & R_{12}^T \\ 0 & -R_{11}^T \end{bmatrix} U^T$$

$$= U \begin{bmatrix} -R_{11}R_{22}^T & * \\ 0 & -R_{22}R_{11}^T \end{bmatrix} U^T = U$$  U^T

è una dec. di Schur strutturata di $\mathcal{H}^2$ (non di $\mathcal{H}$!) che posso usare per calcolare autoval/autovett.

<u>Remark</u>: $\mathcal{H}$ Hamiltoniana $\Leftrightarrow$ <u>antisimm</u> risp. $\langle u, v\rangle_J$

$\mathcal{H}^2$ <u>anti</u>Hamiltoniana $\Leftrightarrow$ <u>simm</u> risp. $\langle u, v\rangle_J$: $(\mathcal{H}^2)^* J = J\mathcal{H}^2$

(skew-Hamiltonian)

Iterazione segno:

$$\begin{cases} X_0 = \mathcal{H} \\ X_{k+1} = \frac{1}{2}\left(X_k + X_k^{-1}\right) \end{cases}$$

converge a $\mathrm{sign}(\mathcal{H})$; cioè, se $\mathcal{H} = V \left[\begin{array}{c|c} J_- & 0 \\ \hline 0 & J_+ \end{array}\right] V^{-1}$,

$$\mathrm{sign}(\mathcal{H}) = V \left[\begin{array}{c|c} -I & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right] V^{-1}$$

$\Lambda(J_-) \subset LHP$

$\Lambda(J_+) \subset RHP$

A questo punto, $\mathrm{Ker}\left(\mathrm{sign}(\mathcal{H}) + I\right)$ = sottosp. inv. stabile $\mathcal{U}$

Preservo un qualche tipo di struttura? Sì: X_k è Hamiltoniana

Possiamo dimostrarlo:

1) se X Hamiltoniana, X^{-1} Hamiltoniana

$-X^* J = JX \Rightarrow -JX^{-1} = X^{-*}J$

2) X_1, X_2 Hamilt $\Rightarrow \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$ Hamiltoniana

Vorrei implementare l'iterazione in modo che sia esattamente Hamiltoniana.

Trucco: X Hamiltoniana $\Leftrightarrow JX$ simmetrica

$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad J^{-1} = -J$

$-J = J^*$

$$-X^* J = JX$$

$$(JX)^* = X^* J^*$$

$Z_k^{-1} = X_k^{-1} J^{-1}$

Posso scrivere l'it. segno in termini di $Z_k = JX_k$, simmetriche

$$Z_{k+1} = JX_{k+1} = J\,\frac{1}{2}\left(X_k + X_k^{-1}\right) = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{JX_k}_{Z_k} + \underbrace{JX_k^{-1}}_{Z_k^{-1}J}\Big) = \frac{1}{2}\left(Z_k + JZ_k^{-1}J\right)$$

$$\begin{cases} Z_0 = J\mathcal{H} \\ Z_{k+1} = \frac{1}{2}\left(Z_k + JZ_k^{-1}J\right) \end{cases}$$

Se calcolo Z_k^{-1} con un metodo symmetry-preserving (per esempio LDL^T), gli Z_k restano esattamente simmetrici. ($Z - Z' = 0$, non 10^{-16})

Ricordiamo: se definiamo $Y_k = (1 - X_k)^{-1}(1 + X_k)$,

it. segno $\iff$ $Y_{k+1} = -Y_k^2$

In aritmetica esatta, potrei calcolare $Y_0, Y_1, Y_2, \dots$ per quadrature successive.

Gli autoval. di Y_k convergono a 0 e ∞ (anziché -1 e 1)

e se calcolo con un' SVD $\operatorname{Ker} Y_k$ ottengo il sott. inv. stabile $\mathcal{U}$.

Numericamente, è un disastro!

Idea: tengo le Y in un formato fattorizzato

$$\underbrace{Y_0 = \begin{bmatrix} I & G_0 \\ 0 & F_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E_0 & 0 \\ H_0 & 1 \end{bmatrix}}, \quad Y_k = \begin{bmatrix} I & G_k \\ 0 & F_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E_k & 0 \\ H_k & I \end{bmatrix}$$

Come calcolare la fattorizzazione?

Trucco: $Y_0 = (I - \mathcal{H})^{-1}(1 + \mathcal{H})$

Trovare la fatt. equivale a trovare M tale che

$$M \begin{bmatrix} \underbrace{(1 - \mathcal{H})}_{2n} & \vdots & \underbrace{(1 + \mathcal{H})}_{2n} \end{bmatrix}_{2n} = \begin{bmatrix} I & G_0 & \vdots & E_0 & 0 \\ 0 & F_0 & \vdots & H_0 & I \end{bmatrix}$$

Difatti, $Y_0 = (1 - \mathcal{H})^{-1}(1 + \mathcal{H}) = (1 - \mathcal{H})^{-1} M^{-1} M (1 + \mathcal{H}) = \begin{bmatrix} 1 & G_0 \\ 0 & F_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E_0 & 0 \\ H_0 & 1 \end{bmatrix}$.

$M =$ inversa di $\begin{bmatrix} 1 - \mathcal{H}_{11} & \mathcal{H}_{12} \\ -\mathcal{H}_{21} & 1 + \mathcal{H}_{22} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} E_0 & G_0 \\ H_0 & F_0 \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} 1 + \mathcal{H}_{11} & -\mathcal{H}_{12} \\ \mathcal{H}_{21} & 1 - \mathcal{H}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \mathcal{H}_{11} & \mathcal{H}_{12} \\ -\mathcal{H}_{21} & 1 + \mathcal{H}_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 + \mathcal{H}_{11} & -\mathcal{H}_{12} \\ \mathcal{H}_{21} & 1 - \mathcal{H}_{22} \end{bmatrix}.$$

mi permette di calcolare E_0, F_0, G_0, H_0 risolvendo un solo sist. lineare

<u>Osservazione</u>: $E_0 = F_0^T$, $G_0 = G_0^T$, $H_0 = H_0^T$: c'è della struttura!

È collegato a proprietà di simpletticità: Y_0 è simplettica!

$$J \overset{?}{=} \underbrace{(I-\mathcal{H})^{-*}(I+\mathcal{H})^*}_{Y_0^*} J \underbrace{(I+\mathcal{H})(I-\mathcal{H})^{-1}}_{Y_0}$$

$$\Updownarrow$$

$$(I-\mathcal{H})^* J (I-\mathcal{H}) \overset{?}{=} (I+\mathcal{H})^* J (I+\mathcal{H})$$

$$\Updownarrow$$

$$\cancel{J} - \mathcal{H}^* J - J\mathcal{H} + \cancel{\mathcal{H}^* J \mathcal{H}} = \cancel{J} + \mathcal{H}^* J + J\mathcal{H} + \cancel{\mathcal{H}^* J \mathcal{H}}$$

$$\Updownarrow$$

$$0 = 2(\mathcal{H}^* J + J\mathcal{H})$$

$$\Updownarrow$$

$\mathcal{H}$ Hamiltoniana!

Quindi, $\mathcal{H}$ Hamilt. $\Rightarrow$ Y_0 simplettica $\Rightarrow$ $E_0 = F_0^T$, $G_0 = G_0^T$, $H_0 = H_0^T$