Titolo nota 23/09/2020

Lezione del 23/9/2020

Contenuti principali del corso

1. Geometria Proiettiva
2. Topologia Generale
3. Gruppo fondamentale e rivestimenti
4. Analisi complessa in una variabile.

Geometria Proiettiva.

Siano $\mathbb{K}$ un campo e V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.
Lo spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ associato a V è l'insieme

$$\mathbb{P}(V) = \frac{V \setminus \{0\}}{\sim}$$

dove $v \sim w$ se $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tale che $v = \lambda w$.
(Se tale λ esiste, automaticamente $\lambda \in \mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ in quanto $v \neq 0$ e $w \neq 0$).
In altre parole, $\mathbb{P}(V)$ è l'insieme delle rette (cioè sottospazi vettoriali 1-dimensionali) di V: infatti, la mappa

$$\begin{aligned} r &\longmapsto [\text{generatore di } r] \\ \{\text{rette di } V\} &\longrightarrow \mathbb{P}(V) \end{aligned}$$

è una ben definita bigezione (Esercizio).

Def.: La <u>dimensione</u> di $\mathbb{P}(V)$ è

$$\dim \mathbb{P}(V) = \dim_{\mathbb{K}} V - 1$$

Uno spazio proiettivo di dim 1 si dice retta proiettiva, di dimensione 2 si dice piano proiettivo.

Esempi:

1. $\emptyset$ è uno spazio proiettivo di dimensione -1.

   Se $V = \{0\}$, $\mathbb{P}(V) = \emptyset$

   e $\dim \mathbb{P}(V) = \dim V - 1 = 0 - 1 = -1$.

2. $\dim \mathbb{P}(V) = 0 \iff \mathbb{P}(V)$ consta di 1 punto.

   Infatti, $\dim \mathbb{P}(V) = 0 \iff \dim V = 1 \iff$

   $\iff \forall v, w \in V \setminus \{0\}$ si ha $v \sim w$.

3. Se $V = \left(\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}\right)^2$, $\mathbb{P}(V)$ (che è la retta proiettiva "su $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$") consta di 3 punti (Ex.).

4. Se $V = \mathbb{K}^{n+1}$, $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$ si indica con $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ (o, su alcuni testi, $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$).

<u>Convenzione</u>: D'ora in poi, tutti gli spazi proiettivi saranno assunti DI DIMENSIONE FINITA.

Definizione: Siano $\mathbb{P}(V)$, $\mathbb{P}(W)$ spazi proiettivi. Una TRASFORMAZIONE PROIETTIVA è una funzione $f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ tale che esiste $\varphi: V \to W$ lineare per cui $f([v]) = [\varphi(v)]$ $\forall [v] \in \mathbb{P}(V)$.

In tal caso, f si dice INDOTTA da φ.

Osservazioni: ① Se f è indotta da φ, allora φ è necessariamente INIETTIVA. Infatti, se così non fosse, esisterebbe $v \in \operatorname{Ker} \varphi \setminus \{0\}$ per cui $[\varphi(v)]$ non sarebbe definito e l'uguaglianza $f([v]) = [\varphi(v)]$ non potrebbe sussistere.

② Se $\varphi: V \to W$ è iniettiva, effettivamente essa induce $f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ trasformazione proiettiva. Infatti, poniamo $f([v]) = [\varphi(v)]$ e verifichiamo che è una buona definizione. Fatto questo, f sarà la trasformazione proiettiva indotta da φ.

Per prima cosa, data $[v] \in \mathbb{P}(V)$ si ha $v \neq 0$, per cui $\varphi(v) \neq 0$ (perché φ è iniettiva), e $[\varphi(v)]$ ha senso. Inoltre se $[v] = [v']$, allora $v = \lambda v'$, $\lambda \in \mathbb{K}^* \Rightarrow \varphi(v) = \varphi(\lambda v') = \lambda \varphi(v')$

φ è lineare!

$\Rightarrow \varphi(v) \sim \varphi(v') \Rightarrow [\varphi(v)] = [\varphi(v')]$

③ Domanda: Data $f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ trasformazione proiettiva, "quante sono" le $\varphi: V \to W$ lineari che inducono f?

Risposta: DOMANI.

Proposizione: ① $Id: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ è una trasformazione proiettiva

② Composizione di trasformazioni proiettive è una trasformazione proiettiva.

Dim.: ① Segue dal fatto che $Id_{\mathbb{P}(V)}$ è indotta da Id_V, che è lineare.

② Segue dal fatto che la composizione di mappe lineari iniettive è lineare iniettiva. Dunque se $f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$, $g: \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(Z)$ sono trasformazioni proiettive indotte da φ, ψ, allora $g \circ f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(Z)$ è una trasformazione proiettiva indotta da $\psi \circ \varphi$.

Notazione: Se $f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ è indotta da $\varphi: V \to W$, scriveremo $f = [\varphi]$.

Proposizione: $f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ trasformazione proiettiva. Allora f è iniettiva, ed i seguenti fatti sono equivalenti:

① f è surgettiva

② f è bigettiva

③ $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W)$

④ f è invertibile come morfismo tra spazi proiettivi, cioè $\exists\, g : \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(V)$ trasformazione proiettiva con $f \circ g = Id_{\mathbb{P}(W)}$ e $g \circ f = Id_{\mathbb{P}(V)}$.

Se valgono ①–...–④, f si chiama ISOMORFISMO PROIETTIVO.

Dim.: f iniettiva: Se $f([v]) = f([w])$ e $f = [\varphi]$, allora per definizione $[\varphi(v)] = [\varphi(w)]$, cioè $\exists\, \lambda \in \mathbb{K}^*$ con

$$\varphi(v) = \lambda \varphi(w) \Rightarrow \varphi(v) = \varphi(\lambda w) \underset{\varphi \text{ iniettiva}}{\Longrightarrow} v = \lambda w \Rightarrow [v] = [w].$$

Perciò, è chiaro che ① $\Leftrightarrow$ ②

② $\Rightarrow$ ③ Se f è bigettiva, $f = [\varphi]$, allora $\varphi : V \to W$ è surgettiva: se non lo fosse e $H = \varphi(V)$, esisterebbe $w \in W \setminus H$, e $[w]$ non apparterrebbe all'immagine di f: se $f([v]) = [w]$, $[\varphi(v)] = [w]$, $\varphi(v) = \lambda w$ per qualche $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Ma $\varphi(v) \in H$, $w \notin H$, per cui $\lambda w \notin H$ (essendo $\lambda \neq 0$), assurdo.

Dunque φ, essendo iniettiva e surgettiva, è bigettiva. Per un fatto noto sulle mappe lineari, $\varphi : V \to W$ è un isomorfismo $\Rightarrow \dim V = \dim W \Rightarrow \dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W)$.

③ $\Rightarrow$ ④ Sia $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W)$. Allora $\dim V = \dim W$ e, se $f = [\varphi]$, $\varphi : V \to W$ è lineare e iniettiva tra spazi della stessa dimensione.

Dunque $\exists\ \varphi^{-1} : W \to V$ lineare inversa di φ.
Posto $g = [\varphi^{-1}] : \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(V)$, si verifica
che $f \circ g = Id_{\mathbb{P}(W)}$ e $g \circ f = Id_{\mathbb{P}(V)}$.

(1) $\Rightarrow$ (2) OVVIO in quanto funzioni invertibili sono bigettive.

Def: $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ trasformazione proiettiva

stesso spazio

si dice **PROIETTIVITÀ**. Per quanto visto le proiettività sono sempre isomorfismi proiettivi.

Esercizio: Sia $f : \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ una trasformazione proiettiva, con n PARI. Allora $\exists\ P \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ con $f(P) = P$.

Svolgimento: Sia $f = [\varphi]$, $\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ lineare.
Poiché n è pari, $n+1$ è dispari, per cui il polinomio caratteristico di φ, avendo grado dispari, ha almeno una radice, e φ ammette un autovettore v, cioè un $v \neq 0$ tale che $\varphi(v) = \lambda v$ per qualche $\lambda \in \mathbb{K}$.
Dunque, posto $P = [v]$, abbiamo
$$f(P) = f([v]) = [\varphi(v)] = [\lambda v] = [v] = P.$$

Osservazioni: ① I punti fissi di $f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ sono in bigezione con gli autospazi 1-dimensionali di $\varphi: V \to V$, dove φ induce f. (Esercizio)

② Ragionando come sopra, si mostra che ogni proiettività $f: \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ha almeno un punto fisso ($\forall n \in \mathbb{N}$).

SOTTOSPAZI

Fissiamo $\mathbb{P}(V)$. Un SOTTOSPAZIO S di $\mathbb{P}(V)$ è un sottoinsieme $S \subseteq \mathbb{P}(V)$ tale che, se $\pi: V \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(V)$ è la proiezione al quoziente, $\pi^{-1}(S) = H \setminus \{0\}$ per qualche sottospazio vettoriale H di V. In tal caso si ha

$$S = \pi(H \setminus \{0\}) \text{ "}=\text{" } \mathbb{P}(H)$$

più che un'uguaglianza, è una bigezione naturale.

La dimensione di S è $\dim S = \dim H - 1 = \dim \mathbb{P}(H)$.

La codimensione di S è $\dim \mathbb{P}(V) - \dim S = \dim V - \dim H$.

Proposizione: L'intersezione di sottospazi proiettivi è un sottospazio proiettivo.

Dim.: Siano S_i, $i \in I$, sottospazi di $\mathbb{P}(V)$ e $\forall i \in I$ sia $H_i \subseteq V$ un sottospazio vettoriale tale che

$S_i = \mathbb{P}(H_i)$. Allora $\bigcap_{i\in I} H_i$ è un sottospazio vettoriale di V e

$$\bigcap_{i\in I} S_i = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} H_i\right).$$

verificatelo! È semplicissimo.

$\square$

Per la verifica, può essere utile (ed è comunque interessante) notare preliminarmente che, se S è un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$, allora il sottospazio $H\subseteq V$ per cui $S = \pi(H\setminus\{0\})$ è unico (ed è esattamente $\pi^{-1}(S)\cup\{0\}$).

Def.: Sia $A\subseteq \mathbb{P}(V)$ un sottoinsieme. Allora indicheremo con $L(A)\subseteq \mathbb{P}(V)$ il più piccolo sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ che contiene A.
$L(A)$ si chiama SOTTOSPAZIO GENERATO da A.
È una buona definizione per la proposizione precedente: $L(A)$ è l'intersezione di tutti i sottospazi proiettivi che contengono A.

Osservazione: L'unione $S_1\cup S_2$ di sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$ non è in generale un sottospazio proiettivo (lo è solo se $S_1\subseteq S_2$ o $S_2\subseteq S_1$). Il sottospazio "somma" di S_1 e S_2 è $L(S_1,S_2) := L(S_1\cup S_2)$

Teorema (Formula di Grassmann proiettiva): Siano S_1, S_2 sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$. Allora

$$\dim L(S_1, S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim (S_1 \cap S_2)$$

Lemma: Siano $S_1 = \mathbb{P}(H_1)$, $S_2 = \mathbb{P}(H_2)$. Allora $L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(H_1 + H_2)$.

Dim. lemma: Infatti, sia H un sottospazio di V tale che $\mathbb{P}(H) \supseteq L(S_1, S_2)$. Allora, poiché

$S_1 \subseteq L(S_1, S_2) \subseteq \mathbb{P}(H)$ si ha $H_1 \subseteq H$, e

$S_2 \subseteq L(S_1, S_2) \subseteq \mathbb{P}(H) \implies H_2 \subseteq H$.

Dunque $H_1 + H_2 \subseteq H$ (fatto ovvio di algebra lineare).

D'altro canto, $H_1 + H_2 \supseteq H_1 \implies \mathbb{P}(H_1 + H_2) \supseteq \mathbb{P}(H_1) = S_1$

$H_1 + H_2 \supseteq H_2 \implies \mathbb{P}(H_1 + H_2) \supseteq \mathbb{P}(H_2) = S_2$

Dunque $\mathbb{P}(H_1 + H_2)$ è un sottospazio proiettivo che contiene $S_1 \cup S_2$, per cui $L(S_1, S_2) \subseteq \mathbb{P}(H_1 + H_2)$

Per quanto visto prima, d'altronde, se H è un sottospazio vettoriale tale che $S_1 \cup S_2 \subseteq \mathbb{P}(H)$, allora $H_1 + H_2 \subseteq H$. Dunque $\mathbb{P}(H_1 + H_2)$ è il più piccolo sottospazio proiettivo che contiene $S_1 \cup S_2$, come voluto.

Dim. Formula di Grassmann: Siano H_1, H_2 sottospazi vettoriali di V con $S_1 = \mathbb{P}(H_1)$, $S_2 = \mathbb{P}(H_2)$. Allora

$$\dim L(S_1, S_2) = \dim \mathbb{P}(H_1 + H_2) = \dim(H_1 + H_2) - 1 =$$

$$= \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2) - 1 =$$

Grassmann vettoriale

$$= (\dim S_1 + 1) + (\dim S_2 + 1) - (\dim(S_1 \cap S_2) + 1) - 1 =$$

$$= \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2).$$