Lezione 24/9/2020

Titolo nota 24/09/2020

Formula di Grassmann proiettiva: Siano $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{P}(V)$ sottospazi proiettivi. Allora

$$\dim L(S_1, S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim S_1 \cap S_2$$

Corollario: Sia $\dim \mathbb{P}(V) = n$, e siano S_1, S_2 due sottospazi con $\dim S_1 + \dim S_2 \geq n$. Allora $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$.

Dim.: Per Grassmann, $\dim S_1 \cap S_2 = \underbrace{\dim S_1 + \dim S_2}_{\geq n} - \underbrace{\dim L(S_1, S_2)}_{\leq n} \geq 0$

Perciò $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ (ricordo che $\dim \emptyset = -1$, e che due sottospazi proiettivi POSSONO avere intersezione vuota, al contrario di ciò che accade per spazi vettoriali: i punti sono tutti sottospazi proiettivi!).

Esempio: Due rette proiettive in un piano proiettivo si intersecano sempre, in quanto $1+1 \geq 2$.

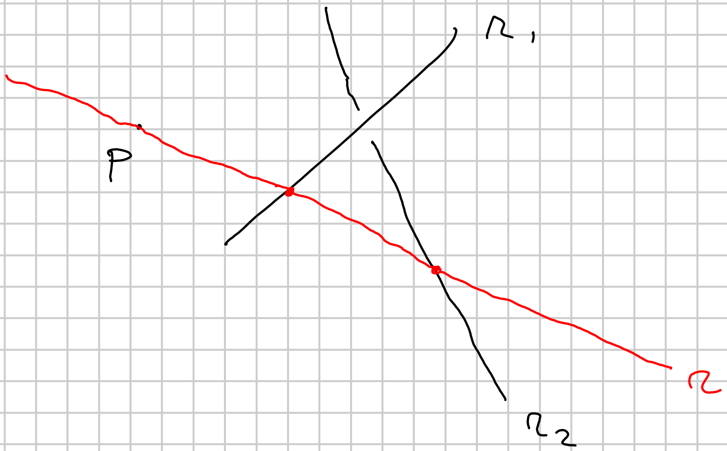
Vedremo che lo spazio proiettivo n-dimensionale "estende" lo spazio affine n-dimensionale, aggiungendo "punti all'∞". Mentre due rette affini nel piano affine possono non incontrarsi (se sono parallele non coincidenti), due rette proiettive nel piano proiettivo si incontrano sempre.

Poiché ogni retta affine si "estende" a una retta proiettiva, rette parallele disgiunte si incontreranno nel piano proiettivo "all'infinito".

Esercizio: Sia $\mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo di dimensione 3, e siano $P \in \mathbb{P}(V)$ un punto, $r_1, r_2 \subseteq \mathbb{P}(V)$ due rette disgiunte tali che $P \notin r_1 \cup r_2$. Si mostri che $\exists!$ retta $r \subseteq \mathbb{P}(V)$ tale che

$$P \in r, \qquad r \cap r_1 \neq \emptyset, \qquad r \cap r_2 \neq \emptyset.$$

Svolgimento:



Cerchiamo r. Vediamo prima l'unicità: capire come deve essere fatta r ci aiuterà a costruirla. Supponiamo perciò che r verifichi la tesi.

Poiché $P \in r$, $r \cap r_1 \neq \emptyset$, avremo $\boxed{r \subseteq L(P, r_1)}$.

Infatti, notiamo che $r \neq r_1$ (altrimenti non può contenere P) per cui $r \cap r_1$ consta esattamente di un punto (essendo non vuoto: due rette o sono disgiunte, o sono coincidenti, o si intersecano in un punto), chiamiamolo $Q_1 = r \cap r_1$. Allora

$r = L(P, Q_1)$ (in quanto $L(P, Q_1) \subseteq r$ e hanno la stessa dimensione: $\dim L(P, Q_1) = 1$ per varie ragioni ovvie, o per Grassmann), per cui $r = L(P, Q_1) \subseteq L(P, r_1)$.

Analogamente, $r \subseteq L(P, r_2)$, per cui

$$r \subseteq L(P, r_1) \cap L(P, r_2).$$

Osserviamo che $L(P, r_1)$ è un piano, in quanto

$$\dim L(P, r_1) = \dim \{P\} + \dim r_1 - \dim P \cap r_1 =$$
$$= 0 + 1 - (-1) = 2, \text{ e anche}$$

$$\dim L(P, r_2) = 2.$$

Infine, dico che i piani $L(P, r_1)$, $L(P, r_2)$ si intersecano in una retta. Per Grassmann,

$$\dim \left(L(P, r_1) \cap L(P, r_2)\right) = \dim L(P, r_1) + \dim L(P, r_2) - \underbrace{\dim L(P, r_1, r_2)}_{\leq 3} \geq$$
$$\geq 2 + 2 - 3 = 1, \text{ e}$$

$$\dim \left(L(P, r_1) \cap L(P, r_2)\right) \leq \dim L(P, r_1) = 2.$$

Se però $\dim \left(L(P, r_1) \cap L(P, r_2)\right) = 2$, avremmo $L(P, r_1) \cap L(P, r_2)$ sarebbe un piano che contiene le rette disgiunte r_1, r_2, il che è assurdo (due rette in un piano si incontrano sempre!).

Dunque $L(P, r_1) \cap L(P, r_2)$ è una retta. Poiché $r \subseteq L(P, r_1) \cap L(P, r_2)$, necessariamente $r = L(P, r_1) \cap L(P, r_2)$.

Ciò mostra l'unicità.

Per l'esistenza, poniamo $r = L(P, r_1) \cap L(P, r_2)$. Abbiamo

già dimostrato che r è effettivamente una retta. Inoltre, per costruzione $P \in r$ (in quanto $P \in L(P, r_i)$ per $i=1,2$).
Inoltre, per costruzione, per $i=1,2$, r ed r_i giacciono entrambe nel piano $L(P, r_i)$ e dunque hanno intersezione non vuota. La tesi segue.

Osservazione: lo stesso enunciato è falso (ma vero genericamente, cioè con probabilità 1 se scegliamo P, r_1, r_2 a caso) nello spazio affine 3-dimensionale $\mathbb{K}^3$.
(Proiettivizzando il problema, potrebbe capitare che r incontri r_1 e/o r_2 all'infinito; si noti che l'ipotesi corretta sarebbe r_1, r_2 sghembe, e non solo disgiunte).
Pensateci meglio dopo le prossime lezioni.

SISTEMI DI PUNTI IN $\mathbb{P}(V)$.

Def.: Siano $P_1, \dots, P_k$ punti di $\mathbb{P}(V)$. Essi si dicono

INDIPENDENTI se, posto $P_i = [v_i]$ $\forall i = 1, \dots, k$, i vettori $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti in V.
Poiché, se $\lambda_i \neq 0$ $\forall i$, $v_1, \dots, v_k$ sono indipendenti se e solo se lo sono $\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_k v_k$, la definizione non dipende dalla scelta dei v_i.

Esercizio: $P_1, \dots P_k$ sono indipendenti $\Longleftrightarrow$ $\dim L(P_1, \dots, P_k) = k-1$.

Se $\dim \mathbb{P}(V) = n$, in $\mathbb{P}(V)$ una k-upla di punti indipendenti verifica necessariamente $k \leq n+1$.

Def.: $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{P}(V)$ sono IN POSIZIONE GENERALE se:

1. Se $k \leq n+1$, $P_1, \dots, P_k$ sono indipendenti
2. Se $k > n+1$, qualsiasi sottoinsieme di $\{P_1 \dots P_k\}$ di cardinalità $\leq n+1$ è dato da punti indipendenti.

Esempio: Un insieme di punti di un piano proiettivo di cardinalità ≥ 3 è in posizione generale $\Longleftrightarrow$ non contiene triple di punti allineati.

Def.: Sia $\dim \mathbb{P}(V) = n$. Un RIFERIMENTO PROIETTIVO di $\mathbb{P}(V)$ è un insieme ordinato di $(n+2)$ punti in posizione generale.

I primi $(n+1)$ punti si chiamano PUNTI FONDAMENTALI, l'ultimo PUNTO UNITÀ.

I riferimenti proiettivi giocano per gli spazi proiettivi lo stesso ruolo giocato dalle basi per gli spazi vettoriali.

Def.: Dato un riferimento proiettivo $\mathcal{R}$ $P_0, P_1, \dots, P_{n+1}$ di $\mathbb{P}(V)$, una BASE NORMALIZZATA $\mathcal{B}$ associata ad $\mathcal{R}$ è un insieme di vettori $v_0, \dots, v_n \in V$ tale che:

$[v_0] = P_0, \ [v_1] = P_1, \ \ldots, \ [v_n] = P_n, \ \underbrace{[v_0 + \ldots + v_n] = P_{n+1}}_{\text{ATTENZIONE!}}.$

Prop.: Ad ogni riferimento proiettivo è associata una (non unica) base normalizzata, che è effettivamente una base di V. Due basi $(v_0, \ldots, v_n)$, $(v_0', \ldots, v_n')$ associate allo stesso riferimento differiscono per la moltiplicazione per un unico scalare dei loro elementi, cioè $\exists\, \lambda \in \mathbb{K}^*$ tale che $v_i' = \lambda v_i \quad \forall i = 0, \ldots, n$ (e λ NON dipende da i).

Dim.: Sia $v_i \in V$ tale che $[v_i] = P_i \quad \forall i = 0, \ldots, n+1$.

Poiché $P_0, \ldots, P_{n+1}$ sono in posizione generale, $P_0, \ldots, P_n$ sono indipendenti, cioè $v_0, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti in V, e ne formano perciò una base. Dunque $\exists\, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tali che

$$v_{n+1} = a_0 v_0 + \ldots\ldots + a_n v_n.$$

Notiamo che $a_i \neq 0 \quad \forall i = 0, \ldots, n$, perché altrimenti i vettori $v_{n+1}, v_0, v_1, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_n$ sarebbero dipendenti,

v_i tolto

contro l'ipotesi che $P_{n+1}, P_0, \ldots, \widehat{P_i}, \ldots, P_n$ siano indipendenti.

P_i tolto

Dunque se pongo $v_i' = a_i v_i$, ottengo $v_i' \neq 0$ e

$[v_i'] = [v_i] = P_i$, ma anche

$[v_0' + \ldots + v_n'] = [a_0 v_0 + \ldots + a_n v_n] = [v_{n+1}] = P_{n+1}$,

dunque $(v_0', \ldots, v_n')$ è una base associata a $\mathcal{R}$.

Come osservato, $(v_0, \ldots, v_n)$ è una base vettoriale di V,

perciò lo è anche $(v_0', \ldots, v_n')$. Se

$v_0'', \ldots, v_n''$ è un'altra base associata a $\mathcal{R}$,

da $[v_i'] = [v_i'']$ deduciamo $v_i'' = \lambda_i v_i'$ $\forall i$,

con $\lambda_i \in \mathbb{K}^*$. Inoltre,

$[v_0' + \ldots + v_n'] = [v_0'' + \ldots + v_n'']$, per cui $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*$

t.c. $\lambda(v_0' + \ldots + v_n') = v_0'' + \ldots + v_n''$ Ma allora

$\lambda v_0' + \ldots + \lambda v_n' = v_0'' + \ldots + v_n'' = \lambda_0 v_0' + \ldots + \lambda_n v_n'$

da cui $\lambda_i = \lambda$ $\forall i = 0, \ldots, n$, per unicità delle coordinate

del vettore $\lambda v_0' + \ldots + \lambda v_n'$ rispetto alla base $v_0', \ldots, v_n'$.

Dunque $v_i'' = \lambda v_i'$ $\forall i = 0, \ldots, n$, come richiesto.

$\square$

Teorema: Siano $f, g : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ trasformazioni proiettive,

con $f = [\varphi]$, $g = [\psi]$, $\varphi, \psi : V \to W$ lineari.

Sia anche $\mathcal{R}$ un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$.

Sono fatti equivalenti:

1. $f = g$
2. $f(P) = g(P)$ $\forall P \in \mathcal{R}$

③ $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ t.c. $\varphi = \lambda \psi$

Dim.: ① $\Longrightarrow$ ②

② $\Longrightarrow$ ③ Sia $v_0, \dots, v_{n+1}$ una base normalizzata associata al $\mathcal{R}$. Poiché $f(P) = g(P)$ $\forall P \in \mathcal{R}$, se $\mathcal{R} = \{P_0, \dots, P_{n+1}\}$, $\forall i = 0, \dots, n+1$ si ha

$[\varphi(v_i)] = f(P_i) = g(P_i) = [\psi(v_i)]$, cioè $\exists \lambda_i \in \mathbb{K}^*$ con

$$\varphi(v_i) = \lambda_i \psi(v_i) \qquad \forall i = 0, \dots, n+1.$$

Ma per definizione di base associata,

$v_{n+1} = v_0 + \dots + v_n$, per cui

$$\varphi(v_{n+1}) = \varphi(v_0 + \dots + v_n) = \varphi(v_0) + \dots + \varphi(v_n) = \lambda_0 \psi(v_0) + \dots + \lambda_n \psi(v_n)$$

D'altronde

$$\varphi(v_{n+1}) = \lambda_{n+1} \psi(v_{n+1}) = \lambda_{n+1} \psi(v_0 + \dots + v_n) = \lambda_{n+1} \psi(v_0) + \dots + \lambda_{n+1} \psi(v_n)$$

Poiché ψ è iniettiva, $\psi(v_0), \dots, \psi(v_n)$ sono indipendenti, per cui dall'uguaglianza

$$\lambda_0 \psi(v_0) + \dots + \lambda_n \psi(v_n) = \lambda_{n+1} \psi(v_0) + \dots + \lambda_{n+1} \psi(v_n)$$

si deduce $\lambda_i = \lambda_{n+1}$ $\forall i = 0, \dots, n$, cioè

$\varphi(v_i) = \lambda_{n+1} \psi(v_i)$ $\forall i = 0, \dots, n$. Dunque le funzioni lineari φ e $\lambda_{n+1} \psi$ coincidono sulla base $v_0, \dots, v_n$ di V, e perciò $\varphi = \lambda_{n+1} \cdot \psi$, come voluto.

③ $\Rightarrow$ ① Se $\varphi = \lambda \psi$, $\forall\, v \in V \setminus \{0\}$

$$f([v]) = [\varphi(v)] = [\lambda \psi(v)] = [\psi(v)] = g([v]),$$

per cui $f = g$.

$\square$

Corollario: le proiettività di $\mathbb{P}(V)$ sono in bigezione con $\mathbb{P}GL(V) = \dfrac{GL(V)}{N}$, $N \triangleleft GL(V)$,

$N = \{\lambda \cdot Id_V,\ \lambda \in \mathbb{K}^*\}$. Infatti, la mappa

$$\begin{aligned} GL(V) &\xrightarrow{\ \Theta\ } \text{Proiettività di } \mathbb{P}(V) \\ \varphi &\xmapsto{\ \Theta\ } [\varphi] \end{aligned}$$

è surgettiva (visto ieri), è un omomorfismo di gruppi (osservato ieri), e $\operatorname{Ker} \Theta = N$ (visto nel Teorema precedente).

Teorema (fondamentale delle trasformazioni proiettive):
Siano $\mathbb{P}(V)$, $\mathbb{P}(W)$ spazi proiettivi con $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W) = n$, e siano $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$ riferimenti proiettivi di $\mathbb{P}(V)$, $\mathbb{P}(W)$ rispettivamente.
Allora $\exists!$ trasformazione proiettiva $f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ che porti $\mathcal{R}$ in $\mathcal{R}'$ (ordinatamente).

Dim.: Siano $\mathcal{R} = (P_0, \dots, P_{n+1})$, $\mathcal{R}' = (Q_0, \dots, Q_{n+1})$ e siano $(v_0, \dots, v_n)$, $(w_0, \dots, w_n)$ basi normalizzate associate a $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$.

Esistenza: Sia $\varphi : V \to W$ lineare t.c. $\varphi(v_i) = w_i \ \forall i = 0, \dots, n$.
Tale φ esiste perché $v_0, \dots, v_n$ è base di V, ed è invertibile perché $w_0, \dots, w_n$ è una base di W. Inoltre, automaticamente

$$\varphi(v_{n+1}) = \varphi(v_0 + \dots + v_n) = \varphi(v_0) + \dots + \varphi(v_n) = w_0 + \dots + w_n = w_{n+1}$$

per cui $\forall i = 0, \dots, n+1$

$$f(P_i) = f([v_i]) = [\varphi(v_i)] = [w_i] = Q_i.$$

Unicità: Discende direttamente dal Teorema visto prima.

$\square$