ANALISI 2

NOVAGA

LEZIONE 4

FUNZIONI DIFFERENZIABILI

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

f È DIFF. $\boxed{\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v \qquad \forall v}$

NON È VERO SE f NON È DIFF.

ES: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$\nabla f(0,0) = (0,0) \qquad \frac{\partial f}{\partial v} \nexists$ SE $v \not\parallel \{e_1, e_2\}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$\frac{\partial f}{\partial v} = \begin{cases} 0 & \text{se } v \parallel \{e_1, e_2\} \\ \dfrac{v_2^2}{v_1} & \text{se } v \not\parallel e_1 \end{cases}$, CIOÈ $\nabla f(0) = 0$, $v = (v_1, v_2)$

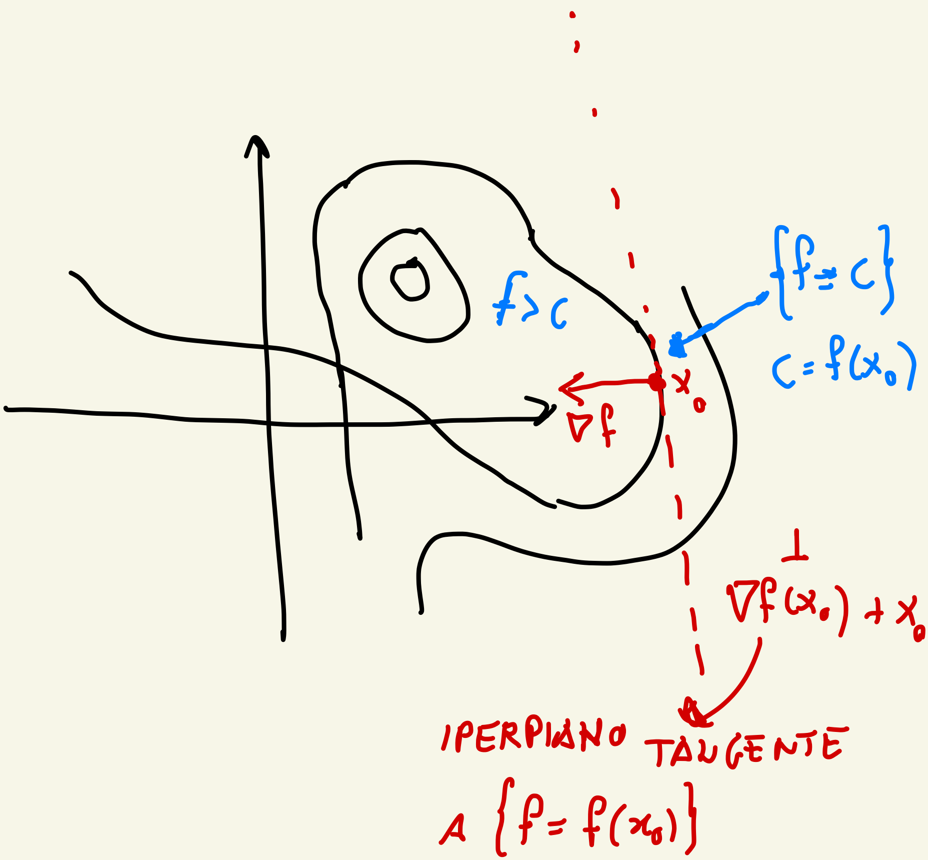
IN PARTICOLARE $\dfrac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}$, $\nabla f(x_0) \neq 0$

REALIZZA IL MASSIMO DI

$\dfrac{\partial f}{\partial v}$ TRA I VETTORI $|v| = 1$;

CIOÈ $\nabla f(x_0)$ INDIVIDUA LA

DIREZIONE DI MASSIMA PENDENZA DI f.



$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad m > 1$

f DIFF. IN x_0 SE

$$f(x) = f(x_0) + L \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$$

$L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ LINEARE, CIOÈ MATRICE $n \times m$

$L = Df(x_0) \qquad f = (f_1, \dots f_m)$

$$Df(x_0)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$ MATRICE JACOBIANA

$$Df(x_0) = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \vdots \\ \nabla f_m \end{pmatrix}$$

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

OSS: f DIFF. $\Leftrightarrow$ f_i SONO DIFF. $\forall i$

LO STESSO VALE IN SPAZI DI BANACH

$f: A \subseteq B_1 \to B_2$ B_1, B_2 SP. DI BANACH

f FRECHÉT-DIFF. IN $x_0 \in \mathring{A}$ SE $\exists L$

$$f(x) = f(x_0) + L(x-x_0) + o(x-x_0)$$

CON $L: B_1 \to B_2$ LINEARE E CONTINUA

(TRA SPAZI DI B. $\exists$ FUNZ. LINEARI NON CONTINUE)

$L = Df(x_0)$ DIFF. DI f IN x_0

f GATEAUX-DIFF. SE $\exists L$ LIN. E CONTINUO

$$f(x_0+tv) = f(x_0) + L(tv) + o(t)$$

f F-DIFF. $\Rightarrow$ f G-DIFF., MA $\not\Leftarrow$

FUNZIONI COMPOSTE

$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\quad g : B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$

$f(A) \subseteq B$ $\quad g \circ f : A \to \mathbb{R}^k$

f DIFF. IN x_0 E g DIFF. IN $f(x_0)$

$\Rightarrow$ $g \circ f$ È DIFF. IN x_0 E

$$D\, g \circ f\, (x_0) = Dg\big(f(x_0)\big) \cdot Df(x_0)$$

$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = O(x - x_0)$

INFATTI

$$f(x) - f(x_0) = Df(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + Dg(f(x_0))\big(f(x) - f(x_0)\big) + o\big(f(x) - f(x_0)\big)$$

$$\Rightarrow g(f(x)) - g(f(x_0)) = \boxed{Dg\big(f(x_0)\big)\, Df(x_0)}\,(x - x_0) + o(x - x_0)$$

ES: $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$

$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ CURVA

CONT. E DIFF.

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ DIFF.

$\Rightarrow$ $f \circ \gamma(t) = f(\gamma(t))$ È DERIVABILE

RESTRIZIONE DI f AL SUPPORTO DI γ

E SI HA

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) \cdot \gamma_i'(t)$$

PRINCIPIO DI FERMAT

$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ DIFF. IN x_0

$x_0 \in A$ PUNTO DI MASSIMO O MINIMO LOCALE

$\Rightarrow \nabla f(x_0) = 0.$

DIM: FISSATO $v \neq 0$

$f_v(t) = f(x_0 + tv)$ HA

UN MAX O MIN LOCALE IN $t=0$

$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} f_v(0) = \nabla f(x_0) \cdot v$

$\Rightarrow \nabla f(x_0) = 0.$

FUNZIONI OMOGENEE

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ È α-OMOGENEA

SE: $f(tx) = t^\alpha f(x) \quad \forall t > 0$

ES: $f(x) = \|x\| \qquad \|\cdot\|$ NORMA SU $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow f$ È 1-OMOGENEA

TEO f DIFF. α-OMOG.

$\Longleftrightarrow \quad \nabla f(x) \cdot x = \alpha f(x).$

DIM. CONSIDERIAMO

$$F(t) = \frac{f(tx)}{t^\alpha} \qquad t > 0$$

F È DERIVABILE

$$F'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{f(tx)}{t^\alpha}\right) =$$

$$\frac{(\nabla f(tx)\cdot x)\,t^\alpha - \alpha t^{\alpha-1} f(tx)}{t^{2\alpha}}$$

$$= \frac{1}{t^{\alpha+1}}\left(\underline{\nabla f(tx)\cdot tx - \alpha f(tx)}\right)$$

$$= 0 \quad \forall t>0 \iff F(t) = \text{cost.}$$

cioè $\iff f(tx) = t^\alpha f(x)$

DERIVATE SUCCESSIVE

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\nabla(\nabla f) = \nabla^2 f = H_f : \mathbb{R}^n \to M_{n \times n}$

HESSIANO O MATRICE HESSIANA DI f

$$H_f(x_0)_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$$

IN GENERALE

$$\nabla^k f_{i_1 \dots i_k} = \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(x_0) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x_0)$$

<u>OSS:</u> NON SEMPRE DERIVATE PARZIALI DIVERSE COMMUTANO