Proposizione - Definizione: ① Sia $V \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ un sottospazio proiettivo di dimensione k non contenuto in H_0. Allora $j_0^{-1}(V \cap U_0)$ è un sottospazio affine di $\mathbb{K}^n$, detto PARTE AFFINE di V, la cui dimensione (affine) è uguale a quella (proiettiva di V).

② Viceversa, se $W \subseteq \mathbb{K}^n$ è un sottospazio affine di dimensione k, allora $\exists!$ sottospazio proiettivo $\overline{W}$ di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ tale che $j_0^{-1}(\overline{W} \cap U_0) = W$. Tale $\overline{W}$ si chiama CHIUSURA PROIETTIVA di W, e soddisfa $\dim \overline{W} = \dim W$.

proiettiva affine

Dimostrazione: ① Sia $h = n-k$ la codimensione di V. Allora V è definito da un sistema di equazioni cartesiane di rango h della forma

$$\begin{cases} a_{10} x_0 + \dots + a_{1n} x_n = 0 \\ \dots\dots \\ a_{h0} x_0 + \dots + a_{hn} x_n = 0 \end{cases}$$

Per definizione, $j_0(x_1 \dots, x_n) \in V \iff [1, x_1, \dots, x_n] \in V$

$$\iff \begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = -a_{10} \\ \dots\dots \\ a_{h1} x_1 + \dots + a_{hn} x_n = -a_{h0} \end{cases}$$

che è un sistema lineare NON omogeneo nelle n variabili $(x_1, \dots, x_n)$. Per costruzione, l'insieme delle soluzioni del sistema è $j_0^{-1}(V \cap U_0)$. Per concludere, basta perciò verificare che questo sistema definisce un sottospazio affine di codimensione h, cioè, per Rouché-Capelli, che

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{h1} & \dots & a_{hn} \end{pmatrix} = \underbrace{\operatorname{rk}\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & -a_{10} \\ & \dots & & \\ a_{h1} & \dots & a_{hn} & -a_{h0} \end{array}\right)}_{} = h$$

vero per Rouché-Capelli, in quanto, poiché per ipotesi $V \not\subseteq H_0$, il sistema ha soluzione.

Questo rango è $= h$ per ipotesi: questa matrice è ottenuta dalle equazioni cartesiane di H spostando una colonna e cambiandole il segno

Ciò conclude la dimostrazione di 1.

2 Il sottospazio affine W ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{h1}x_1 + \dots + a_{hn}x_n = b_h \end{cases}$$

con $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{h1} & \dots & a_{hn} \end{pmatrix} = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ & \dots & & \\ a_{h1} & \dots & a_{hn} & b_h \end{pmatrix} = h$

Poniamo $\overline{W}$ il sottospazio proiettivo ottenuto "sostituendo" $\frac{x_i}{x_0}$ a x_i $\forall i \neq 0$, cioè il sottospazio di equazioni

$$\begin{cases} -b_1 x_0 + a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = 0 \\ \quad - - - - - \\ -b_h x_0 + a_{h1} x_1 + \dots + a_{hn} x_n = 0 \end{cases}$$

Ripercorrendo quanto fatto in (1), si vede che $j_0^{-1}(\overline{W} \cap U_0) = W$. Ciò dà l'esistenza.

Per l'unicità, siano W_1, W_2 due chiusure proiettive di W. Allora per definizione $j_0^{-1}(W_1 \cap U_0) = j_0^{-1}(W_2 \cap U_0) = W$, cioè W è la parte affine sia di W_1 sia di W_2.

In particolare, $\dim W_1 = \dim W_2$. Per Grassmann, se fosse $W_1 \neq W_2$, avremmo $\dim(W_1 \cap W_2) < \dim W_1 = \dim W$, ma avremmo ancora $j_0^{-1}((W_1 \cap W_2) \cap U_0) = W$, per cui, per (1), $\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W$, assurdo.

$\square$

Esercizio: Siano r_1, r_2 due rette affini parallele e distinte di $\mathbb{K}^2$. Allora $\overline{r}_1 \cap \overline{r}_2$ consta del punto all'infinito di r_1, che coincide con quello di r_2.

Dim.: In generale, se r ha equazione $ax_1 + bx_2 + c = 0$, il punto all'∞ di r si ottiene prendendo $\overline{r} \cap H_0$.

$\overline{r}$ ha equazione $ax_1 + bx_2 + cx_0 = 0$ (visto sopra: vi ricordo che ciò segue dal fatto che vorremmo sostituire

x_i con $\frac{x_i}{x_0}$, per cui $ax_1+bx_2+c=0$ diventerebbe

$a\frac{x_1}{x_0}+b\frac{x_2}{x_0}+c=0$, cioè $ax_1+bx_2+cx_0$; i condizionali sono dovuti al fatto che sto disinvoltamente moltiplicando e/o dividendo per x_0; la vera dimostrazione è quella sopra).

Dunque $\pi \cap H_0$ è definito da

$$\begin{cases} ax_1+bx_2+cx_0=0 \\ x_0=0 \end{cases} \iff \begin{cases} ax_1+bx_2=0 \\ x_0=0 \end{cases}$$

che ha come soluzione il punto $[0,-b,a]=\pi\cap H_0$

(stiamo supponendo $(a,b)\neq(0,0)$ dall'inizio, perché $ax_1+bx_2+c=0$ è l'equazione di una retta affine).

Dunque il punto all'∞ di una retta di equazione $ax_1+bx_2+c=0$ è $[0,-b,a]$, dal che segue che rette parallele hanno lo stesso punto all'∞, da cui la tesi.

CURVE ALGEBRICHE PIANE

Fatto noto su $\mathbb{K}[x_1,\dots x_n]$: tale anello è un U.F.D., cioè un dominio a fattorizzazione unica, cioè ogni $p\in\mathbb{K}[x_1,\dots x_n]\setminus\{0\}$ ammette un'unica (a meno dell'ordine e di moltiplicazione per elementi di $\mathbb{K}^*$) decomposizione $p=a\cdot p_1^{d_1}\cdots p_k^{d_k}$, $a\in\mathbb{K}^*$, p_i IRRIDUCIBILE (cioè tale che, se $p_i=r_i\cdot s_i$, allora $\deg r_i=0$ o $\deg s_i=0$), $\forall i=1,\dots,k$).

Def.: Una CURVA AFFINE (piana) è una classe di equivalenza $[f]$, con $f \in \mathbb{K}[x_1, x_2] \setminus \{0\}$, con $f \sim g$ se $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ tale che $f = \lambda \cdot g$.

In sostanza, è un'equazione polinomiale, a meno di scalari.

La indicheremo spesso con $C = [f]$. Diciamo che:

- $\deg C = \deg f$ (è ben definito, perché se $f = \lambda g$, $\deg f = \deg g$);
- che C è irriducibile se f lo è (è una nozione ben definita);
- che C' è una componente irriducibile di C se $C' = [p]$ e p è un fattore irriducibile di f;
- se $C = [f]$, $C' = [g]$, indicheremo con $C + C' = [f \cdot g]$ (è facile vedere che $C + C'$ è ben definito)

Da quanto visto, segue che una curva C si decompone nelle sue componenti irriducibili:

$C = n_1 C_1 + \dots + n_k C_k$, con C_i irriducibile $\forall i$,

e $n_i C_i := \underbrace{C_i + \dots + C_i}_{n \text{ volte}}$; n_i si dice molteplicità di C_i in C.

C si dice RIDOTTA se, data la decomposizione in irriducibili con $C_i \neq C_j$ $\forall i \neq j$, si ha $n_i = 1$ $\forall i$.

<u>Definizione</u>: Se $C = [f]$ è una curva affine, il SUPPORTO di C è l'insieme

$V(C) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2 : f(x_1, x_2) = 0\}$.

"variety"

È ben definito perché se $f = \lambda g$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$, gli zeri di f coincidono con quelli di g.

Osservazione: Se C, C' sono curve, $V(C+C') = V(C) \cup V(C')$.
Segue dal fatto che $(f \cdot g)(x_1, x_2) = 0 \iff f(x_1, x_2) = 0$ o $g(x_1, x_2) = 0$.

Notazioni - convenzioni: Se $C = [f]$, si dice che C "ha equazione" f o $f = 0$, e, con un abuso, a volte si scrive $\boxed{C = \{f = 0\}}$. scrittura formalmente molto errata

Esempi: (1) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, C di equazione $x_1 \cdot x_2 = 0$.
C è riducibile con componenti irriducibili $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$, per cui $V(C)$ è unione di due rette (complesse).
È ridotta, in quanto le componenti irriducibili hanno entrambe molteplicità 1.

(2) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, C' di equazione $x_1^2 \cdot x_2 = 0$.
Allora C' è DIVERSA da C dell'esempio (1), anche se $V(C) = V(C')$.
C' non è ridotta perché la sua decomposizione in irriducibili è $C' = 2C_1 + C_2$,

con C_1 di equazione $x_1=0$ e C_2 di equazione $x_2=0$.

3) $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, C di equazione $x_1^2+x_2^2=0$

$V(C)=\{(x_1,x_2)$ con $x_1^2+x_2^2=0\}=\{(0,0)\}$

Dunque il supporto di C è solo un punto!

È irriducibile, perché se avessimo

$x_1^2+x_2^2=p\cdot q$ con $\deg p\neq 0$, $\deg q\neq 0$, allora

$\deg p=\deg q=1$, per cui $V(C)$ dovrebbe essere

$V([p])\cup V([q])$, che è unione di due rette

(eventualmente coincidenti).

4) $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, C di equazione $x_1^2+x_2^2=0$.

Qui $x_1^2+x_2^2=(x_1+ix_2)\cdot(x_1-ix_2)$, per cui

C è riducibile, e $V(C)$ è unione di due

rette complesse.

5) $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, C di equazione $x_1^2+x_2^2+x_1+1$.

Allora $V(C)=\emptyset$! Infatti, $\forall x_1\in\mathbb{R}$

si ha $x_1^2+x_1+1>0$ per cui

$x_1^2+x_2^2+x_1+1>0$. Ne segue, esattamente come in

3), che C è irriducibile.

Dunque curve diverse possono avere lo stesso supporto e

esistono curve (almeno in $\mathbb{R}$) con supporti più piccoli

del previsto. Le cose vanno un po' meglio su campi

algebricamente chiusi, come $\mathbb{C}$, dove è possibile dimostrare (ad esempio) che ogni curva ha supporto con infiniti punti, e che due curve irriducibili con lo stesso supporto coincidono (su $\mathbb{R}$ ciò è falso: $x_1^2+x_2^2+1=0$ e $x_1^2+x_2^2+2=0$ hanno lo stesso supporto (vuoto!) ma sono diverse ed entrambe irriducibili).

CURVE PROIETTIVE

Def.: Un polinomio $p \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ si dice OMOGENEO di grado d se ogni monomio che compare in p ha grado d. I polinomi omogenei di grado d uniti al polinomio nullo formano uno spazio vettoriale, che denotiamo con $\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_d$.

Def.: Una CURVA PROIETTIVA (piana) di grado d su $\mathbb{K}$ elemento di $\mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_d)$, cioè un polinomio omogeneo in x_0, x_1, x_2 di grado d, a meno di moltiplicazione per scalari non nulli.

Osservazione: Se $f \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_d$, allora $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*$, $f(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^d f(x_0, x_1, x_2)$, per cui ha senso dire che $f([x_0, x_1, x_2]) = 0$, intendendo che $f(x_0, x_1, x_2) = 0$ $\forall$ rappresentante di $[x_0, x_1, x_2]$. Attenzione: ciò sarebbe falso se f non fosse omogeneo; inoltre, anche se f è omogeneo,

$f([x_0, x_1, x_2])$ non è ben definito; quel che è ben definito è solo il suo annullarsi o meno.

Dunque, se $C = [f]$ è una curva proiettiva, è ben definito il suo supporto $V(C) = \{ P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \text{ con } f(P) = 0 \}$: il fatto che $f(P) = 0$ non dipende né dalla scelta del rappresentante di P né da quello di f come rappresentante di C.

Proprietà dei polinomi omogenei:

Sia $f \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_d$. Allora:

① $f(tx_0, tx_1, tx_2) = t^d f(x_0, x_1, x_2)$.

② se q divide f in $\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$, allora anche q è omogeneo.

③ (Identità di Eulero): Detta f_{x_i} la derivata parziale di f rispetto a x_i, si ha

$$x_0 f_{x_0} + x_1 \cdot f_{x_1} + x_2 f_{x_2} = d \cdot f$$

Precisazioni: L'uguaglianza in ① è vera non solo $\forall t, x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{K}$, ma anche come uguaglianza in $\mathbb{K}[t, x_0, x_1, x_2]$ (riflettete su cosa ciò voglia dire, ricordando la differenza tra polinomi e funzioni polinomiali: se $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, i polinomi $x^p - x$ e 0 sono diversi ma definiscano la stessa funzione polinomiale).

Con derivata parziale di un polinomio si intende la derivata formale rispetto alla variabile considerata, pensando le altre variabili come costanti.

Se $f = x_0^2 x_1 x_2 + x_0 x_1^3 + x_1^2 x_2^2$

$$f_{x_0} = 2x_0 x_1 x_2 + x_1^3 + 0$$