§1. CONT. & DIFFER. $\boxed{\text{1 ott 2020}}$

cont. di funz. in più variabili

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^{\alpha} \cdot |y|^{\beta}}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Per quali valori di α, β è continua?

f è OMOGENEA di grado $\gamma = \alpha + \beta - 2$

$$\boxed{f(\lambda \underline{x}) = \lambda^{\gamma} f(\underline{x})}$$

1. Se $\alpha + \beta - 2 > 0 \implies f$ è continua in 0
2. Se $\alpha + \beta - 2 \leq 0 \implies f$ non è cont. in 0

—— o ——

Dim (1) Basta verificare che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

$$|f(x,y)| \leq \frac{(x^2+y^2)^{\alpha/2}(x^2+y^2)^{\beta/2}}{x^2+y^2}$$

$$\leq (x^2+y^2)^{\frac{\alpha+\beta}{2}-1}$$

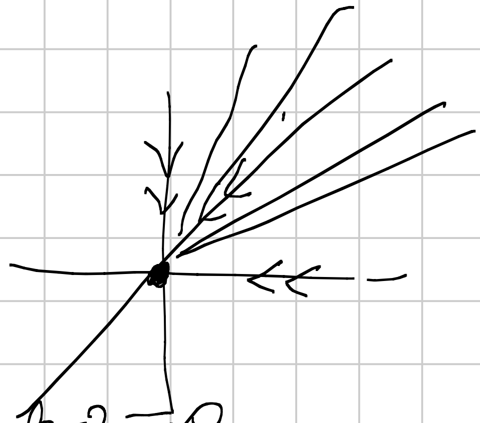
$$\boxed{\frac{\alpha+\beta}{2}-1>0}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$0 \qquad\qquad 0 \quad \sqrt{x^2+y^2} \to 0$$

$|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$

$|y| \leq$ "



② $$f(t,t) = \frac{|t|^{\alpha+\beta}}{2t^2} \longrightarrow \begin{cases} 1/2 & \alpha+\beta-2=0 \\ +\infty & \alpha+\beta-2<0 \end{cases}$$

Questo valore è $\neq 0$

Non esiste il $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

se $\alpha+\beta-2 \leq 0$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y}{|x|^{\alpha} + |y|^{\beta}} \end{cases}$$

per quali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la funz è cont. in $(0,0)$?

<u>OSS</u>; il caso interessante è $\underline{\alpha > 0}$ et $\underline{\beta > 0}$

↳ es: se $\beta = 0$ $\quad \dfrac{x\,y}{|x|^{\alpha} + 1}$

se $\beta \leq 0$

$$0 \leq \left| \frac{x\,y \cdot |y|^{-\beta}}{|y|^{-\beta}|x|^{\alpha} + 1} \right| \leq |x| \cdot |y|^{1-\beta} \leq \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{2-\beta}$$

$$\boxed{2-\beta \geq 2}$$

$\to 0 \qquad \to 0$

se $\sqrt{x^2+y^2} \to 0$

se $\alpha \leq 0$ la funz. è · continua in 0

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x|^\alpha + |y|^\beta} \end{cases}$$

$$|f(x,y)| = \frac{\left(|x|^{\alpha/2}\right)^{2/\alpha} \left(|y|^{\beta/2}\right)^{2/\beta}}{|x|^\alpha + |y|^\beta}$$

$$\begin{matrix} |u| \\ |v| \end{matrix} \leq \sqrt{u^2+v^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = \lim_{\substack{(u,v)\to(0,0) \\ u>0 \\ v>0}} \frac{u^{2/\alpha} \cdot v^{2/\beta}}{u^2+v^2}$$

$|x|^{\alpha/2} = u$

$|y|^{\beta/2} = v$

Il limite è zero se

$2/\alpha + 2/\beta - 2 > 0$

$\boxed{\text{per l'esercizio visto prima}}$

Se $\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} - 2 \leq 0$ la funz. non è continua nell'origine sempre per lo stesso motivo

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \leq 1$$

$$\beta + \alpha \leq \alpha\beta$$

Oppure lo si vede calolando il limite

$$f(t^{\beta}, t^{\alpha}) = \frac{t^{\alpha+\beta}}{2t^{\alpha}\beta} = \frac{1}{2} t^{\alpha+\beta-\alpha\cdot\beta} \xrightarrow[t\to 0^+]{} \begin{cases} 1/2 & \alpha+\beta=\alpha\beta \\ +\infty & \alpha+\beta<\alpha\beta \end{cases}$$

Se $\alpha+\beta \leq \alpha\beta$ non è continua

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}\right)^2 & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è continua?

esistono le deriv. parziali? deriv. direzionali?

è differenziabile?

$x^2 \leq x^2 + y^2$

$|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$

Domanda:

$\exists \lim_{(x,y) \to (0,0)}$

$$|f(x,y)| = \left| \frac{x^2 \sin(y)}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|x|^2 \, |y|}{x^2 + y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

$|\sin y| \leq |y|$

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}\right)^2 & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- cont.
- deriv. parz., der. direz.,
- differenziabilità

f è <u>continua</u>, e <u>differenz</u> su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$(x,y) \longmapsto (x^2 y)^2$ è continua su $\mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto (x^4 + y^2)^2$ è continua su $\mathbb{R}^2$

$t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ è continua su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\Longrightarrow f$ continua su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

la differenz. nei punti $\neq (0,0)$
è garantita dal teorema del differenziale totale

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}\right)^2 & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2\left(\frac{x^2 y}{x^4+y^2}\right) \cdot \frac{2xy(x^4+y^2) - x^2 y\, 4x^3}{(x^4+y^2)^2}$$

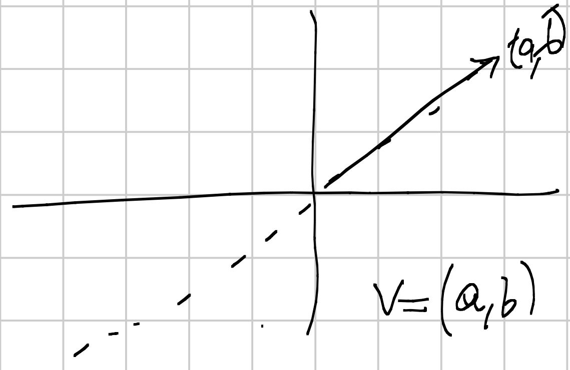
è continua in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2\left(\frac{x^2 y}{x^4+y^2}\right) \cdot \frac{x^2(x^4+y^2) - x^2 y\, 2y}{(x^4+y^2)^2}$$

//

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\overset{=0}{f(t,0)} - \overset{=0}{f(0,0)}}{t}$$



$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(ta,tb) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\left(\frac{(ta)^2 tb}{(ta)^4 + t^2b^2}\right)^2 - 0}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} t \left(\frac{a^2 b}{a^4 t^2 + b^2}\right)^2$$

$$= 0$$

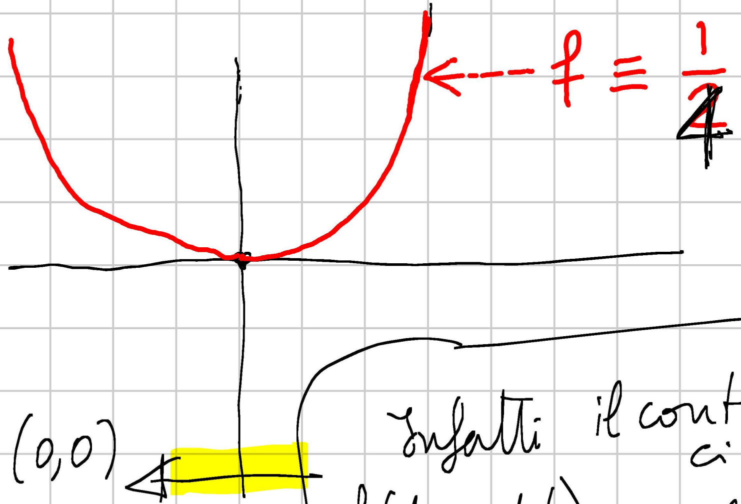
$(a,b) \neq (0,0)$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{se } b\neq 0 \\ \sim t\left(\frac{a^2}{b}\right)^2 \text{ per } t\to 0\end{array}}$$

La funzione è differenziabile in (0,0)?

NO. La funzione non è nemmeno continua in (0,0)

$$f(t,t^2) = \left(\frac{t^2 \cdot t^2}{t^4 + t^4}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \qquad t \neq 0$$



Oss: Questa funzione è anche Gateaux differenziabile in $(0,0)$

Infatti il conto visto prima ci dice che
$$f(ta, tb) = O(t^2)$$
$\forall (a,b) \neq (0,0)$

Ma non è differenziabile in $(0,0)$ (non è nemmeno continua!)

Es x casa

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3}{x^4+y^4}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^4+y^2}$$

$$f(x,y) = \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}$$

- Dire se f è est. per cont. in $(0,0)$
- Dire se f così estesa è differenz.
- Calcolare $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

$$|f(x,y)| \leq x^2+y^2$$

$$\begin{cases} |x| \leq \sqrt{x^2+y^2} \\ |y| \leq \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

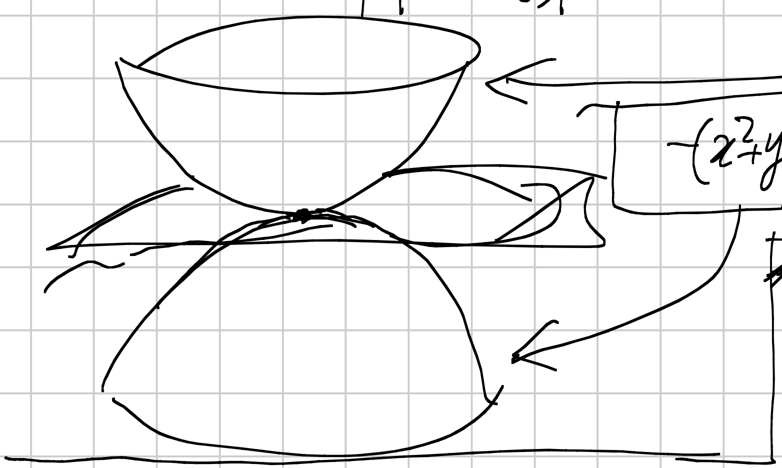
$$\Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

e la funzione così estesa è differenziabile in $(0,0)$ perché

$$f(x,y) = \boxed{\underset{\overset{\|}{0}}{f(0)} + \underline{0}\cdot(x,y)} + o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

0

$$|f(x,y)| \le \cancel{4}x^2 + \cancel{2}y^2$$



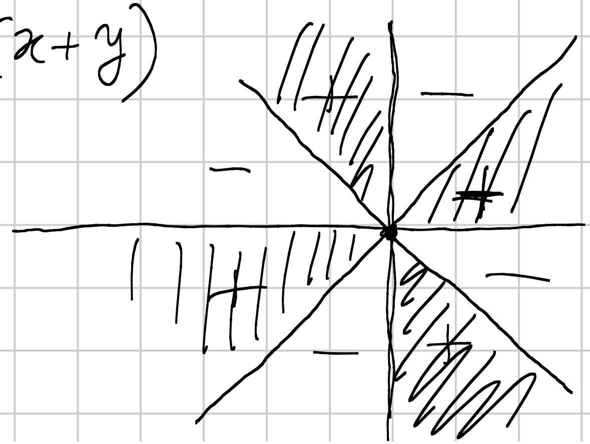
$$\boxed{-(x^2+y^2) \le f(x,y) \le x^2+y}$$

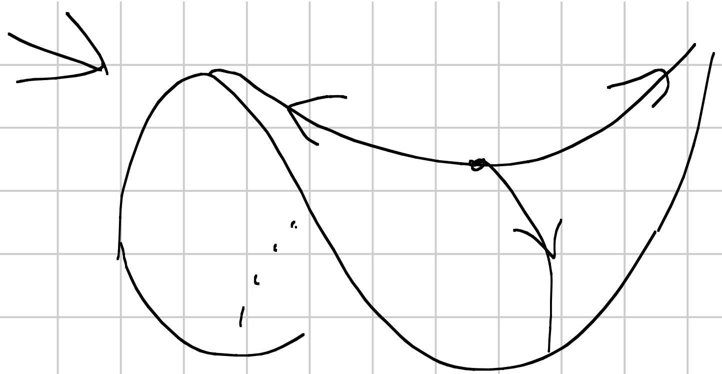
$$x^2+y^2 = o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$\operatorname{sgn} f = \operatorname{sgn} N$$

$$N = xy(x-y)(x+y)$$

$$\frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} \quad \begin{matrix} \leftarrow N \\ \leftarrow D > 0 \end{matrix}$$





Esercizio: calcolare $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f\,(0,0)$

e $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f\,(0,0)$

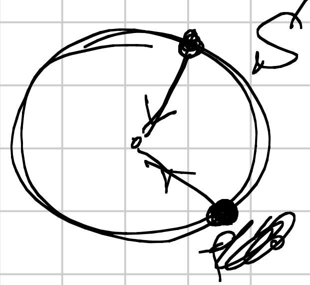
Es. 1 via omogeneità (nel caso $\alpha, \beta > 0$)

$$\frac{|x|^{\alpha}|y|^{\beta}}{x^2+y^2}$$

omogenea di grado

$$\gamma = \alpha + \beta - 2$$

Continua su $\mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}$



$S = \{|\underline{x}| = 1\}$

$M = \max_S f$

$m = \min_S f$

$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ continua su } \mathbb{R}^2\setminus\{\underline{0}\} \\ f\ \gamma\text{-omogenea} \\ \text{allora} \end{array}}$

$$f(\underline{x}) = f\left(|\underline{x}| \cdot \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|}\right) = |\underline{x}|^{\gamma} f\left(\frac{\underline{x}}{|\underline{x}|}\right)$$

$$m\,|\underline{x}|^{\gamma} \leq f(\underline{x}) \leq M\,|\underline{x}|^{\gamma}$$

se $\gamma > 0$
$\Rightarrow f$ è continua in 0

$$f(x) = |x|^{\gamma} f\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

se $\gamma = 0 \Rightarrow f$ è continua $\Leftrightarrow f$ è costante

se $\gamma < 0 \Rightarrow f$ è cont. $\Leftrightarrow f \equiv 0$

infatti se $f(x_0) > 0$ allora

$$f(t x_0) = t^{\gamma} f(x_0) \xrightarrow[t \to 0^+]{} +\infty$$