$$f(x,y) = \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}$$

- Continuità
- differenz.
- derivate seconde

Esercitazione del 2 ott 2020

— o —

$\mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}$ la funz. è cont. differenziabile, (problemi ~~in zero~~ nell'origine)

$f(x,y) = O(x^2+y^2)$ per $(x,y) \to (0,0)$

è in $(0,0)$ assegnandole il valore 0

e tale estensione è differenziabile in $(0,0)$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{(3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - (x^3y - xy^3)2x}{(x^2+y^2)^2}$$

se $(x,y) \neq (0,0)$

$N = 3x^4y - y^3x^2 - 2x^4y + 2x^2y^3 + 3x^2y^3 - y^5$

$= 4x^2y^3 + x^4y - y^5$

D

$$= \frac{4x^2y^3 + x^4y - y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ è funz. omogenea di grado 1

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P(x,y)}{q(x,y)}\right)$$

$$= \frac{q \cdot \partial_y P - P\,\partial_y q}{q^2(x,y)}$$

$gr(q) + gr(P) - 1$

$\boxed{2\ gr(q)}$

è funzione omogenea di grado

$$gr(p) - 1 - gr(q) = 0$$

$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ è una funzione omogenea di grado 0

$\Longrightarrow$ non è continua nell'origine

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(0,t) - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} f(0,0)}_{0} \right)$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \, \frac{-t^5}{t^4} = -1$$

$$f(x,y) = -f(y,x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^5 - y^4 x - 4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right]\cdot\frac{1}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\,\frac{t^5}{t^4} = 1$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ esiste continua

$\frac{\partial f}{\partial y}$ " "

$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$ $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$ esistono ma non sono continue in $(0,0)$

e $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \neq \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f(0,0)$

$\boxed{\text{Caso patologico}}$

TEO (Schwartz) $\Omega \in \mathbb{R}^n$

se $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$

$\Rightarrow$ le derivate miste coincidono

$$|f(x,y)| = \frac{|x|^3 |y|}{x^4+y^2}$$

è estendibile in $(0,0)$?

$$= \frac{(x^2)^{3/2}|y|}{(x^2)^2+y^2}$$

$x^2 = u$

è omogenea di grado $1/2$

$\Rightarrow$ è $o((u^2+y^2)^{1/4})$

$$\lim_{(u,y)\to(0,0)} \frac{|u|^{3/2}|y|}{u^2+y^2} = 0$$

$o(1)$

la funz. è est. per cont. in $(0,0)$

$$f(x,y) = \frac{x^3 \cdot y^3}{x^4+y^4}$$

è est per cont. in $(0,0)$

$f(x,y) = o(x^2+y^2)$

$\Rightarrow$ f è estendibile in $(0,0)$

l'estensione è differenziabile

— o —

$$\frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha}$$

$\boxed{\alpha \geq 1 \text{ non è continua}}$

$\boxed{\text{se } \alpha < 1 \text{ è continua}}$

$\boxed{\text{definendo } f(0,0) = 0}$

Per quali valori di α è differenziabile?

Consider $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$

$$\partial_v f(0,0) = \lim_{t\to 0} \left[f(at, bt) - f(0,0) \right] \frac{1}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{ab\,t}{(a^2+b^2)^{\alpha} |t|^{2\alpha}} = \lim_{t\to 0} c \frac{t}{|t|^{2\alpha}}$$

$$c \, \frac{t}{|t|^{2\alpha}} \xrightarrow[t \to 0]{}$$

~~la~~ f non è diff in $(0,0)$

se $1 - 2\alpha < 0$ il limite non esiste

a meno che $c = 0$

se $1 - 2\alpha = 0$ il limite non esiste $\begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$

se $1 - 2\alpha > 0$ il limite esiste