lezione 2 ottobre

Titolo nota 02/10/2020

Verifichiamo le proprietà dei polinomi omogenei elencate ieri.

Sia $f \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_d \setminus \{0\}$. Allora:

① $f(tx_0, tx_1, tx_2) = t^d f(x_0, x_1, x_2)$

OVVIA, BASTA SOSTITUIRE

② Se $f = p \cdot q$, allora p e q sono polinomi omogenei.

Infatti, $p = p_{i_0} + p_{i_1} + \dots + p_{i_k}$, dove p_{i_j} è omogeneo di grado i_j (basta definire p_{i_j} come la somma di tutti i monomi di grado i_j) e non nullo, $i_0 < i_1 < \dots < i_k$.

Analogamente, $q = q_{j_0} + \dots + q_{j_h}$, $q_{j_e} \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_{j_e} \setminus \{0\}$

Poiché $f = p \cdot q$, avremo $f = \underset{\substack{\text{polinomio omogeneo} \\ \text{di grado } i_0 + j_0}}{p_{i_0} \cdot q_{j_0}} + \underbrace{\dots\dots \dots + \dots}_{\substack{\text{somma di monomi di} \\ \text{grado} > i_0 + j_0}}$

Nella somma al membro destro, il polinomio $p_{i_0} \cdot q_{j_0}$ non può essere (nemmeno parzialmente) cancellato da altri addendi.

Dunque, poiché f è omogeneo, $f = p_{i_0} \cdot q_{j_0}$.

Analogamente, ragionando sul grado massimo invece che minimo, si ottiene $f = p_{i_k} \cdot q_{j_h}$. In particolare,

$\deg f = \deg(p_{i_0} \cdot q_{j_0}) = i_0 + j_0$, e

$\deg f = \deg(p_{i_k} \cdot q_{j_h}) = i_k + j_h$, da cui, essendo $i_0 \le i_k$ e $j_0 \le j_h$, necessariamente $i_0 = i_k$ e $j_0 = j_h$. Ciò significa che $p = p_{i_0} = p_{i_k}$ e $q = q_{j_0} = q_{j_h}$ sono omogenei, come volevamo.

(3) $$x_0 f_{x_0} + x_1 f_{x_1} + x_2 f_{x_2} = d \cdot f$$

È sufficiente verificare l'uguaglianza nel caso in cui f sia un monomio, in quanto ambo i membri dell'uguaglianza sono lineari rispetto a f (in quanto la derivazione parziale è un operatore lineare).

Sia perciò $f = x_0^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2}$ con $i_0 + i_1 + i_2 = d$.

$$x_0 \cdot f_{x_0} = x_0 \cdot \left(i_0 x^{i_0 - 1} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \right) = i_0 \, x_0^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2} = i_0 \cdot f$$

$$x_1 \cdot f_{x_1} = x_1 \cdot \left(i_1 x_0^{i_0} x_1^{i_1 - 1} x_2^{i_2} \right) = i_1 \, x_0^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2} = i_1 \cdot f$$

$$x_2 \cdot f_{x_2} = \text{- - - - - - - - - - - - - -} = i_2 \cdot f$$

per cui $\sum_{i=0}^{2} x_i f_{x_i} = (i_0 + i_1 + i_2) \cdot f = d \cdot f$, come voluto.

Osservazione: Se $C = [f]$, $C' = [g]$ sono curve proiettive di grado d e d' rispettivamente, allora $f \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_d \setminus \{0\}$, $g \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_{d'} \setminus \{0\}$, per cui $f \cdot g \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_{d+d'} \setminus \{0\}$, per cui $[f \cdot g]$ è una curva proiettiva; come nel caso affine, essa dipende solo da $[f]$ e $[g]$, e la possiamo perciò indicare con $C + C'$.

Abbiamo usato il fatto ovvio che il prodotto di polinomi omogenei è omogeneo.

Come nel caso affine, definiamo una curva proiettiva $C = [f]$ IRRIDUCIBILE se f lo è, come polinomio in $\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$. Per il punto (2) visto sopra, se C è RIDUCIBILE, allora $f = p \cdot q$, con p, q omogenei, per cui $C = [p] + [q]$, e C si decompone in effetti in curve proiettive di grado minore.

Da (2), discende in realtà che i fattori irriducibili di f sono tutti omogenei, per cui possiamo definire le nozioni di componente irriducibile, curva ridotta, curva irriducibile (come già fatto poche righe fa) per curve proiettive ricalcando esattamente le definizioni date nel caso affine.

EQUIVALENZA AFFINE E PROIETTIVA DI CURVE.

Definizione: Sia $C = [f]$ una curva di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, e sia $\varphi : \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ una proiettività. Osserviamo che, se $\varphi = [A]$, dove $A : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ è lineare, $f \circ A : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}$ è un polinomio omogeneo dello stesso grado di f. Stessa cosa vale per $f \circ A^{-1}$ (vi ricordo che A è necessariamente invertibile). Infatti, $f \circ A$ e $f \circ A^{-1}$ sono ottenuti sostituendo in f ogni variabile x_i con una combinazione lineare di x_0, x_1, x_2, del tipo $ax_0+bx_1+cx_2$.

Ho perciò senso porre

$$\varphi(C) = [f \circ A^{-1}].$$

La definizione è ben posta perché se g è un altro rappresentante di f e B è un altro rappresentante di φ, allora $g=\lambda f$, $B=\mu A$, $B^{-1}=\mu^{-1}A^{-1}$, e

$$[g\circ B^{-1}] = [(\lambda f)\circ(\mu^{-1}A^{-1})] = [\lambda\mu^{-d} f\circ A^{-1}] =$$
$$= [f\circ A^{-1}],$$

dove $d = \deg f$.

Fatti: (1) Se $\varphi, \psi : \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ sono proiettività, e C è una curva proiettiva, allora

$$\varphi(\psi(C)) = (\varphi\circ\psi)(C).$$

(Fatelo per esercizio!)

(2) φ, C come sopra. Allora

$$\varphi(V(C)) = V(\varphi(C)).$$

Cioè, φ porta il supporto di C in quello di $\varphi(C)$.

Infatti, con le notazioni della definizione,

$$P=[v] \in V(\varphi(C)) \iff f(A^{-1}(v)) = 0 \iff$$

per definizione di $\varphi(C)$ per definizione di $V(C)$

$\Longleftrightarrow \quad [A^{-1}v] \in V(C) \Longleftrightarrow \varphi^{-1}(P) \in V(C)$

$\Longleftrightarrow \quad P \in \varphi(V(C))$, come voluto.

Questa dimostrazione spiega perché poniamo $\varphi(C) = [f \circ A^{-1}]$ e non $\varphi(C) = [f \circ A]$.

Definizione: C, C' sono PROIETTIVAMENTE EQUIVALENTI se $\exists$ proiettività $\varphi : \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ con $\varphi(C) = C'$.

Da quanto visto segue facilmente che l'essere proiettivamente equivalenti è una relazione di equivalenza, e che curve equivalenti hanno lo stesso grado.

Lavorando con affinità al posto di proiettività si ottiene un'analoga (e tecnicamente più semplice) definizione di equivalenza per curve affini.

proiettività fissata

Domanda - esercizio: $\varphi : \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$. L'insieme delle curve di grado d è lo spazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_d)$. La mappa

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0,x_1,x_2]_d) &\longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0,x_1,x_2]_d) \\ C &\longmapsto \varphi(C) \end{aligned}$$

è una proiettività? E quanto vale $\dim \mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0,x_1,x_2]_d)$?

CONICHE PROIETTIVE

Def.: Una <u>conica</u> è una curva di grado 2.

Una conica proiettiva è perciò definita da un'equazione omogenea di grado 2 del tipo

$$a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0$$

(supponiamo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, o almeno $\mathrm{char}\,\mathbb{K} \neq 2$).

Detta A la matrice simmetrica $A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

l'equazione si può riscrivere come ${}^t x \cdot A \cdot x = 0$, dove $x = {}^t(x_0, x_1, x_2)$. Inoltre, due matrici A, B simmetriche definiscono la stessa conica $\Leftrightarrow A = \lambda B$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

(Dunque, lo spazio delle coniche è canonicamente isomorfo a $\mathbb{P}(S_3)$, $S_3 = \{$matrici simmetriche $3 \times 3\}$).

Sia $\varphi = [M]$ una proiettività di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, dove $M: \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ è una matrice 3×3. Allora, per definizione, se $C = [A]$ è la conica rappresentata da A, $\varphi(C)$ è rappresentata da

$$ {}^tM^{-1} A M^{-1}$$

(in quanto, per definizione, se A definisce il polinomio omogeneo di grado 2 f, un'equazione di $\varphi(C)$ è data da $f \circ M^{-1}$, e $f(M^{-1}(x)) = {}^t(M^{-1}(x)) \cdot A \cdot M^{-1}(x) = $

$= {}^t x\, {}^t M^{-1} A M^{-1} x$, per cui la matrice che rappresenta $\varphi(C)$ è ${}^t M^{-1} A M^{-1}$).

Corollario: Le matrici simmetriche A, B definiscono la stessa conica $\iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ t.c. A è congruente a λB, cioè $\exists M \in Gl(3, \mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$ t.c. ${}^t M A M = \lambda B$.

Definizione: C conica rappresentata dalla matrice A. Allora il rango di C è il rango di A (ed è ben definito). C si dice DEGENERE se $\operatorname{rk} C < 3$, e NON DEGENERE se $\operatorname{rk} C = 3$. Poiché il rango è invariante per congruenza, esso è invariante per equivalenza proiettiva.

Osservazione: Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, e indichiamo con i_+, i_-, i_0 gli indici di positività, negatività e nullità di una matrice simmetrica, allora se A è una tale matrice $\operatorname{rk}(A) = 3 - i_0$. La segnatura $(i_+(A), i_-(A), i_0(A))$ è invariante per congruenza. Se A è congruente a λB, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora $(i_+(A), i_-(A), i_0(A)) = (i_+(B), i_-(B), i_0(B))$ se $\lambda > 0$, mentre $(i_+(A), i_-(A), i_0(A)) = (i_-(B), i_+(B), i_0(B))$ se $\lambda < 0$. In ogni caso $|i_+(A) - i_-(A)| = |i_+(B) - i_-(B)|$, ed è perciò un invariante proiettivo della curva definita da A.

Teorema (classificazione coniche proiettive complesse):
le classi di equivalenza delle coniche proiettive complesse sono 3, rappresentate da:

C_1 di equazione $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ (non degenere)

C_2 di equazione $x_0^2 + x_1^2 = 0$ (rango 2)

C_3 di equazione $x_0^2 = 0$ (rango 1)

Il rango ne è un invariante completo.

Dim.: Per Sylvester complesso, le classi di congruenza delle metrici simmetriche complesse ~~sono~~ non nulle sono 3, con rappresentanti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ che ,}$$

avendo ranghi diversi, definiscono coniche non equivalenti.

$\square$

Osservazione: $x_0^2 + x_1^2 = (x_0 + i x_1)(x_0 - i x_1)$, per cui C_2 è riducibile e ridotta (il suo supporto è l'unione di due rette incidenti).

$C_3 = [x_0^2]$ è riducibile e non ridotta (è una "retta doppia").

$C_1 = [x_0^2 + x_1^2 + x_2^2]$ è irriducibile (se fosse riducibile, il suo supporto sarebbe unione di due rette, e invece ...)

Teorema (classificazione delle coniche proiettive reali):
le classi di equivalenza delle coniche proiettive reali sono 5, e un insieme di rappresentanti è dato da:

$C_1 = [x_0^2 + x_1^2 + x_2^2]$ (conica vuota)

$C_2 = [x_0^2 + x_1^2 - x_2^2]$ (conica non degenere non vuota)

$C_3 = [x_0^2 + x_1^2]$ (conica ridotta a un punto)

$C_4 = [x_0^2 - x_1^2]$ (2 rette incidenti)

$C_5 = [x_0^2]$ (retta doppia).

Dim.: Per Sylvester reale, le classi di congruenza delle matrici simmetriche 3×3 reali non nulle sono rappresentate dalle matrici diagonali

$A_1 = Id$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$, $A_2' = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$, $A_1' = -Id$

$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$, $A_3' = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$,

$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$, $A_5' = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

Ora A_2 è congruente a $-A_2'$, per cui definiscono la stessa classe di coniche. Stesso discorso per A_3, A_3' e A_5, A_5'.
Inoltre, le matrici A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 sono distinte o dal rango o da $|i_+ - i_-|$ (o da entrambi), per cui definiscono coniche a due a due non equivalenti.
Ciò conclude la dimostrazione in quanto $C_i = [A_i]$, $i = 1, \dots, 5$.