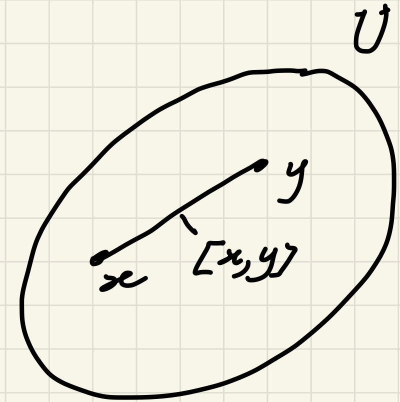
ANALISI 2

NOVAGA

LEZIONE 5

TEOREMA (LAGRANGE)



$f : U \to \mathbb{R}$ $\quad U \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO $\quad x, y \in U$

$[x,y] \subseteq U$ $\qquad [x,y] = \{ \lambda x + (1-\lambda) y : \lambda \in [0,1] \}$

f DIFF. IN U $\Rightarrow$ $f(y) - f(x) = \nabla f(z) \cdot (y - x)$

$z \in [x,y]$.

DIM. $g(t) = f(\overbrace{x + t(y-x)}^{\gamma(t)})$ $\qquad t \in [0,1]$

g DERIVABILE $\qquad g(1) - g(0) = f(y) - f(x) \overset{L.}{=} g'(t_0)$

$$= \nabla f(\underbrace{x + t_0 (y-x)}_{z}) \cdot \underbrace{(y - x)}_{\gamma'(t)} .$$

OSS: $f : U \to \mathbb{R}^m$ $\quad f = (f_1, \dots f_m)$

$$f(y) - f(x) = \left(\dots \nabla f_i(z_i) \cdot (y - x) \dots \right)$$

IN GERALE GLI z_i SONO DIVERSI E

NON SI PUÒ SCRIVERE $f(y) - f(x) = Df(z) \cdot (y - x)$

OSS: $\gamma(t) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ CURVA C^1

$$|\gamma(b) - \gamma(a)| = \left| \int_a^b \gamma'(t)\, dt \right| \le \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$$

$$\le \left(\max_{[a,b]} |\gamma'(t)| \right)(b - a)$$

DEF: $E \subseteq \mathbb{R}^n$ $\overset{E \neq \phi}{\text{È}}$ CONNESSO SE $\nexists$ A_1, A_2 APERTI

CON $A_1 \cap A_2 = \phi$, $E \subseteq A_1 \cup A_2$, $E \cap A_1 \neq \phi$ E $E \cap A_2 \neq \phi$

IN PART. E APERTO È CONNESSO $\Leftrightarrow$

NON È UNIONE DI DUE APERTI DISGIUNTI, NON VUOTI

DEF: E È CONNESSO PER ARCHI SE $\forall\, x, y \in E$

$\exists\, \gamma(t) : [a, b] \to E$ CURVA CONTINUA, CON $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$

PROP: ·) E CONN. PER ARCHI $\Rightarrow$ E CONNESSO MA $\not\Leftarrow$

·) E APERTO, E CONN. PER ARCHI $\Leftrightarrow$ E CONNESSO

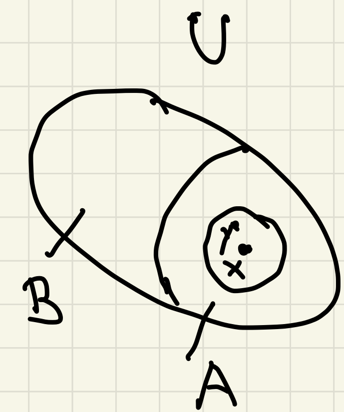
E GLI ARCHI SI POSSONO PRENDERE C^∞ O LIN. A TRATTI

PROP: $f: U \to \mathbb{R}$ DIFF., $U \subseteq \mathbb{R}^n$ AP. CONNESSO

$\nabla f(x) = 0 \quad \forall x \in U \Rightarrow f$ COSTANTE

DIM: (1) $x_0 \in U$ $\qquad A = \{x : f(x) = f(x_0)\} \neq \emptyset$

$B = \{x : f(x) \neq f(x_0)\}$



B È APERTO PERCHÉ f CONT.

A È APERTO, INFATTI $x \in A$ $\exists r > 0$

T.C. $B_r(x) \in U$. $\quad y \in B_r(x)$

$g(t) = f(x + t(y - x)) \qquad g'(t) = 0 \Rightarrow g(0) = f(x) = g(1) = f(y)$

$t \in [0, 1]$

$\Rightarrow B_r(x) \in A$. U CONN $\Rightarrow B = \emptyset \Rightarrow f$ COST.

(2) U CONN. x ARCHI, $\forall x, y \in U \ \exists \gamma(t)$ CURVA C^1

$\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$

$g(t) = f(\gamma(t)) \Rightarrow g'(t) = \nabla f(\gamma) \cdot \gamma' = 0 \Rightarrow g$ COST.

$\Rightarrow f(x) = g(0) = g(1) = f(y)$.

LE DER. PARZIALI COMMUTANO, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ $i \neq j$?

IN GENERALE NO $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y - x y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f DIFF. $\exists$ $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\leftarrow$ VERIFICARE

$$f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$$

TEO (SCHWARZ) $f: U \to \mathbb{R}$ DIFF., $x_0 \in U$,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ E $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ ($i \neq j$) ESISTONO IN U E SONO CONTINUE IN x_0

$\Rightarrow$ SONO UGUALI IN x_0.

DIM. $h, k \in \mathbb{R}$

$$f(x_0 + h e_i + k e_j) - f(x_0 + h e_i) - f(x_0 + k e_j) + f(x_0)$$

$$= h f_{x_i}(x_0 + \theta h e_i + k e_j) - h f_{x_i}(x_0 + \theta h e_i), \qquad \theta \in (0,1)$$

[L. APPLICATO A $g(t) = f(x_0 + t h e_i + k e_j) - f(x_0 + t h e_i)$], $\theta' \in (0,1)$

$$\underset{L.}{=} hk \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0 + \theta h e_i + \theta' k e_j) \underset{\text{CONT.}}{=} hk \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) + o(h^2 + k^2)$$

ANALOG. $\quad \dots = hk \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) + o(h^2 + k^2)$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0).$$

OSS: FUNZIONA PER DERIVATE DI ORDINE PIÙ ALTO

SE $\exists\, f_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}$ E $f_{x_{\sigma(i_1)} \dots \sigma(i_k)}$, σ PERMUTAZIONE,

E SONO CONT. IN $x_0 \Rightarrow$ COINCIDONO

OSS: CON LA STESSA DIM. SI VEDE CHE SE f È DIFF.

2 VOLTE IN $x_0 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) \quad \forall i, j$

(ESERCIZIO)

FORMULA DI TAYLOR

$f : U \to \mathbb{R}$ $\quad f \in C^{k-1}(U)$ E f DIFF. k VOLTE IN $x_0 \in U$

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO

$$\Rightarrow \quad f(x) = T_k(x, x_0, f) + o\left(|x - x_0|^k\right)$$

RESTO DI PEANO

$$T_k(x, x_0, f) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} D^{(i)} f(x_0) [x - x_0]^i$$

TENSORE $\underbrace{n \times n \times \ldots}_{i \text{ VOLTE}} \times n$

$$D^i f(x_0)[v]^i = \sum_{(j_1 \ldots j_i)} f_{x_{j_1} \ldots x_{j_i}}(x_0)\, v_{j_1} \ldots v_{j_i}$$

DIM: $g(t) = f(x_0 + t(x - x_0))$ APPLICHIAMO T. 1D A g IN $t = 0$.

RESTO DI LAGRANGE

$f \in C^k(U)$ DIFF. $(k+1)$-VOLTE IN U

$$f(x) = T_k(x, x_0, f) + \frac{1}{(k+1)!} D^{(k+1)}\left(x_0 + t(x-x_0)\right)[x-x_0]^{k+1}$$

$t \in (0,1)$ E DIP. DA x_0 E DA x.

OSS: QUANTO DETTO VALE ANCHE PER $f: U \to \mathbb{R}^m$, SALVO CHE NEL RESTO DI L. HO $t_i \in (0,1)$ DIVERSE TRA LORO.

MASSIMI E MINIMI LOCALI

$f: U \to \mathbb{R}$ $\quad U \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO $\quad x_0 \in U$

$f(x) = T_2(x, \cancel{x_0, f}) + o(|x-x_0|^2)$ SE f È DIFF. 2 VOLTE IN x_0

$T_2(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + (x-x_0)\, \nabla^2 f(x_0)\, (x-x_0)^t$

PROP: f DIFF. 2 VOLTE IN x_0, x_0 PUNTO CRITICO PER f

CIOÈ $\nabla f(x_0) = 0 \Rightarrow$

1. $\nabla^2 f(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ MAX LOCALE STRETTO
2. $\nabla^2 f(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ MIN " "
3. x_0 MAX LOCALE $\Rightarrow \nabla^2 f(x_0) \leq 0$
4. x_0 MIN " $\Rightarrow \nabla^2 f(x_0) \geq 0$

DIM: (1) $\nabla^2 f(x_0) < 0$, CIOÈ $v \nabla^2 f v^t \leq -\delta |v|^2$, $\delta > 0$,

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0) \nabla^2 f (x-x_0)^t + o(|x-x_0|^2)$$

$$\leq f(x_0) - \delta |x-x_0|^2 + o(|x-x_0|^2) \leq f(x_0) - \frac{\delta}{2} |x-x_0|^2 < f(x_0)$$

SE $|x-x_0|$ È ABB. PICCOLO

SE $x \neq x_0$

$\Rightarrow x_0$ È UN MAX. LOCALE STRETTO

(3) x_0 È UN MAX. LOCALE

PER ASS. SE $\nabla^2 f$ NON È $\leq 0 \Rightarrow \exists \lambda > 0$ AUTOV.

ED ESISTE v AUTOVETTORE, $v \neq 0$,

$$f(x_0 + tv) = f(x_0) + \lambda t^2 |v|^2 + o(t^2) > f(x_0) \text{ PER } t \neq 0 \text{ PICCOLO}$$

$\Rightarrow x_0$ NON È UN MAX. LOCALE.

(2) E (4) SONO ANALOGHI.

UN PUNTO CRITICO CHE NON È MAX O MIN LOCALE SI DICE PUNTO DI SELLA

COR: $\nabla^2 f(x_0)$ NON È DEF. POSITIVO NÉ DEF. NEGATIVO

$\Rightarrow x_0$ È DI SELLA

OSS: $\nabla^2 f(x_0) \geq 0$ SE $v \nabla^2 f v^t \geq 0 \quad \forall v$

$\nabla^2 f(x_0) > 0$ SE $v \nabla^2 f v^t > 0 \quad \forall v \neq 0$

ANALOGAMENTE PER $\leq$ E $<$

SE $\nabla^2 f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0$ T.C. $v \nabla^2 f v^t \geq \delta |v|^2$

ANALOGAMENTE PER $<$

$\delta = \min\limits_{|v|=1} v \nabla^2 f v^t$ CHE $\exists$ PER WEIERSTRASS

SE $\nabla^2 f(x_0)$ È SIMMETRICA (SEMPRE VERO SE f È 2-DIFF.)

$$\nabla^2 f(x_0) \geq 0 \iff \lambda_i \geq 0 \quad \forall \lambda_i \text{ AUTOV. DI } \nabla^2 f(x_0)$$

$$\iff \det M_i \geq 0 \quad \forall M_i \text{ MINORE PRINCIPALE}$$

↳ CRIT. DI SYLVESTER

$$\nabla^2 f(x_0) = \begin{array}{c} \quad\quad i^a \\ \begin{pmatrix} \boxed{\quad\quad f_{x_i x_j}} & \\ & \end{pmatrix} \\ M_i \quad\quad\quad \end{array}$$

ANALOG. PER >

<u>OSS:</u> $n = 2$

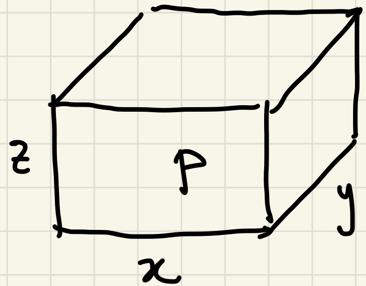
$$\nabla^2 f(x_0) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\iff \begin{cases} f_{xx} \geq 0 \\ f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 \geq 0 \end{cases}$$

ESEMPIO: TROVARE IL PARALLELEPIPEDO IN $\mathbb{R}^3$

DI VOLUME 1 E DI SUPERFICIE MINIMA

PROBLEMA ISOPERIMETRICO PER I PARALLELEPIPEDI



x, y, z LUNGHEZZE

$$Vol = xyz$$

$$Sup = 2(xy + xz + yz) = f(x,y,z)$$

CERCHIAMO MIN DI f CON VINCOLO $x>0,\ y>0,\ z>0,\ xyz = 1$

$z = 1/xy$

E' EQUIV. A TROVARE IL MIN DI

$$g(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad \text{su} \quad \{x>0,\ y>0\}$$

OSSERVIAMO CHE $\lim_{x \to 0} g(x,y) = \lim_{y \to 0} g(x,y) = +\infty$

$$\lim_{(x,y) \to \infty} g(x,y) = +\infty \qquad (x,y) \to \infty \iff \sqrt{x^2+y^2} \to +\infty$$

$\implies$ PER WEIERSTRASS $\exists$ MIN DI g

SE $(\bar{x}, \bar{y})$ È UN PUNTO DI MINIMO $\implies$

$\nabla g(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ E $\nabla^2 g(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0$.

$$g_x(x,y) = y - \frac{1}{x^2} \qquad g_y(x,y) = x - \frac{1}{y^2}$$

$$\begin{cases} \bar{y} = \dfrac{1}{\bar{x}^2} \\ \bar{x} = \dfrac{1}{\bar{y}^2} = \bar{x}^4 \end{cases} \implies \bar{x} = \bar{y} = 1 \implies \bar{z} = 1 \implies P \text{ È UN CUBO UNITARIO}$$

PROBLEMA ISOP: TRA TUTTI GLI INSIEMI DI MISURA V LA PALLA DI RAGGIO R T.C. $|B_R| = V$ È QUELLO CHE MINIMIZZA LA SUP. LATERALE.

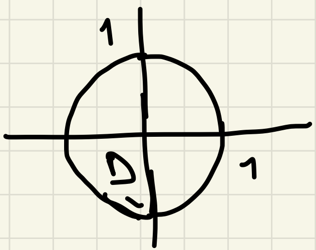
[IN DIM. 2 È IL PROBLEMA DI DIDONE]

VA SPECIFICATO:
- COS'È LA MISURA ← QUESTO LO VEDREMO
- COS'È LA SUP. LATERALE ← QUESTO FORSE
- QUAL È LA CLASSE SU CUI FARE IL MIN.

PROBLEMA FOND. DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI

ESEMPIO: $f(x,y) = ax + by + c$, $a^2+b^2 \neq 0$,

CERCHIAMO MAX E MIN SULL'INSIEME $D = \{x^2+y^2 \leq 1\}$



PER W. $\exists$ SEMPRE. SIA (x_0,y_0) PT. DI MAX.

SE $(x_0,y_0) \in \mathring{D} = \{x^2+y^2<1\} \Rightarrow \nabla f(x_0,y_0) = 0$

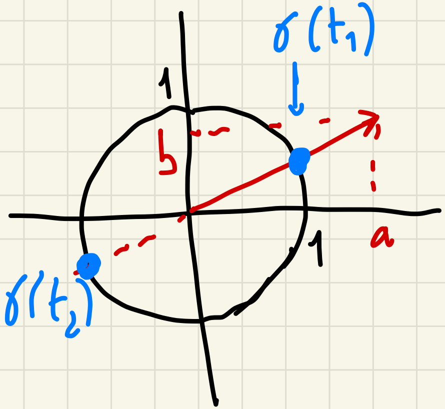
MA $\nabla f = (a,b) \neq 0 \Rightarrow$ IL MAX E IL MIN STANNO SU $\partial D = \{x^2+y^2=1\}$

$\partial D = \mathrm{Im}(\gamma) \qquad \gamma(t) = (\cos t, \sin t) \qquad t \in [0, 2\pi]$

È SUFF. CERCARE MAX/MIN DI $f \circ \gamma = a\cos t + b \sin t + c = g(t)$

$$0 = g'(t) = -a\sin t_0 + b\cos t_0 \Rightarrow (b,-a) \cdot \underbrace{(\cos t_0, \sin t_0)}_{\gamma(t_0)} = 0$$

$$(\cos t_0, \sin t_0) \in (b,-a)^{\perp} \Rightarrow (\cos t_0, \sin t_0) \parallel (a,b)$$



$$\gamma(t_1) = \frac{(a,b)}{|(a,b)|} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) \to \text{MAX}$$

e $$\gamma(t_2) = \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) \to \text{MIN}$$

$$f(\gamma(t_1)) = \sqrt{a^2+b^2} + c$$

$$f(\gamma(t_2)) = -\sqrt{a^2+b^2} + c$$

ESEMPIO: $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO, DIFF. 2 VOLTE

SI DICE **ARMONICA** IN U SE

$$\Delta f(x) = \operatorname{tr}\left(\nabla^2 f(x)\right) = 0 \quad \forall x \in U.$$

$\downarrow$

SI CHIAMA LAPLACIANO $\quad \Delta f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i x_i}(x)$

PROP (PRINC. DEL MASSIMO): U APERTO LIMITATO DI $\mathbb{R}^n$,

$f: \bar{U} \to \mathbb{R}$, $f \in C^0(\bar{U}) \cap C^2(U)$ E $\Delta f = 0$ IN U,

$\Rightarrow f$ ASSUME MASSIMO E MINIMO SU ∂U.

OSS: NEL CASO PREC. $U = B_1(0)$ E $f(x,y) = ax + by + c$ ARMONICA

DIM: VEDIAMO CHE f AMMETTE MAX SU ∂U.

PER ASSURDO $\exists\, x_0 \in U$ T.C. $\max\limits_{\bar U} f = f(x_0) > \max\limits_{\partial U} f$

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ ABB. PICCOLO T.C.

$$f(x_0) > \max_{\partial U} \left[f(x) + \varepsilon |x - x_0|^2 \right]$$

SIA $g(x) = f(x) + \varepsilon |x - x_0|^2 \Rightarrow g(x_0) = f(x_0) > \max\limits_{\partial U} g$

$\Rightarrow \exists\, x_1 \in U$ MASSIMO DI g $\Rightarrow$

$$\nabla g(x_1) = 0 \quad E \quad \nabla^2 g(x_1) \leq 0$$

tr

ASSURDO

$\uparrow$

$$0 \geq \nabla^2 g(x_0) = \nabla^2 f(x_0) + 2\varepsilon \, Id \Rightarrow 0 \geq \Delta g(x_0) = \Delta f(x_0) + 2\varepsilon n$$