$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \\ \dfrac{x^{2}+y^2-\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

continuità & differenziabilità

su $\mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}$ la funz. è differenziabile

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^4) \qquad t \to 0$$

$$\sin(x^2+y^2) = x^2+y^2 - \frac{(x^2+y^2)^3}{6} + o((x^2+y^2)^4)$$

$\boxed{x^2+y^2 \to 0}$

$$f(x,y) = \frac{\frac{1}{6}(x^2+y^2)^3 + o\left((x^2+y^2)^4\right)}{(x^2+y^2)}$$

$$= \frac{1}{6}(x^2+y^2)^2 + o\left((x^2+y^2)^3\right)$$

pertanto $f(x,y) = \underline{o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}$ ← per $(x,y) \to \underline{0}$

e quindi

$$\underline{f(x,y) = \overset{0}{f(0,0)} + \overset{0}{\nabla f(0,0)} \cdot (x,y) + o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}$$

Metodo alternativo: studiare

$$f(x,y) = \varphi(x^2+y^2)$$

$$\varphi(t) = \frac{1 - \sin t}{t}$$

$$f_a(x;y) = x^3 + y^3 - 3axy$$

Mostrare che $\forall\, x, y, a > 0$ si ha che

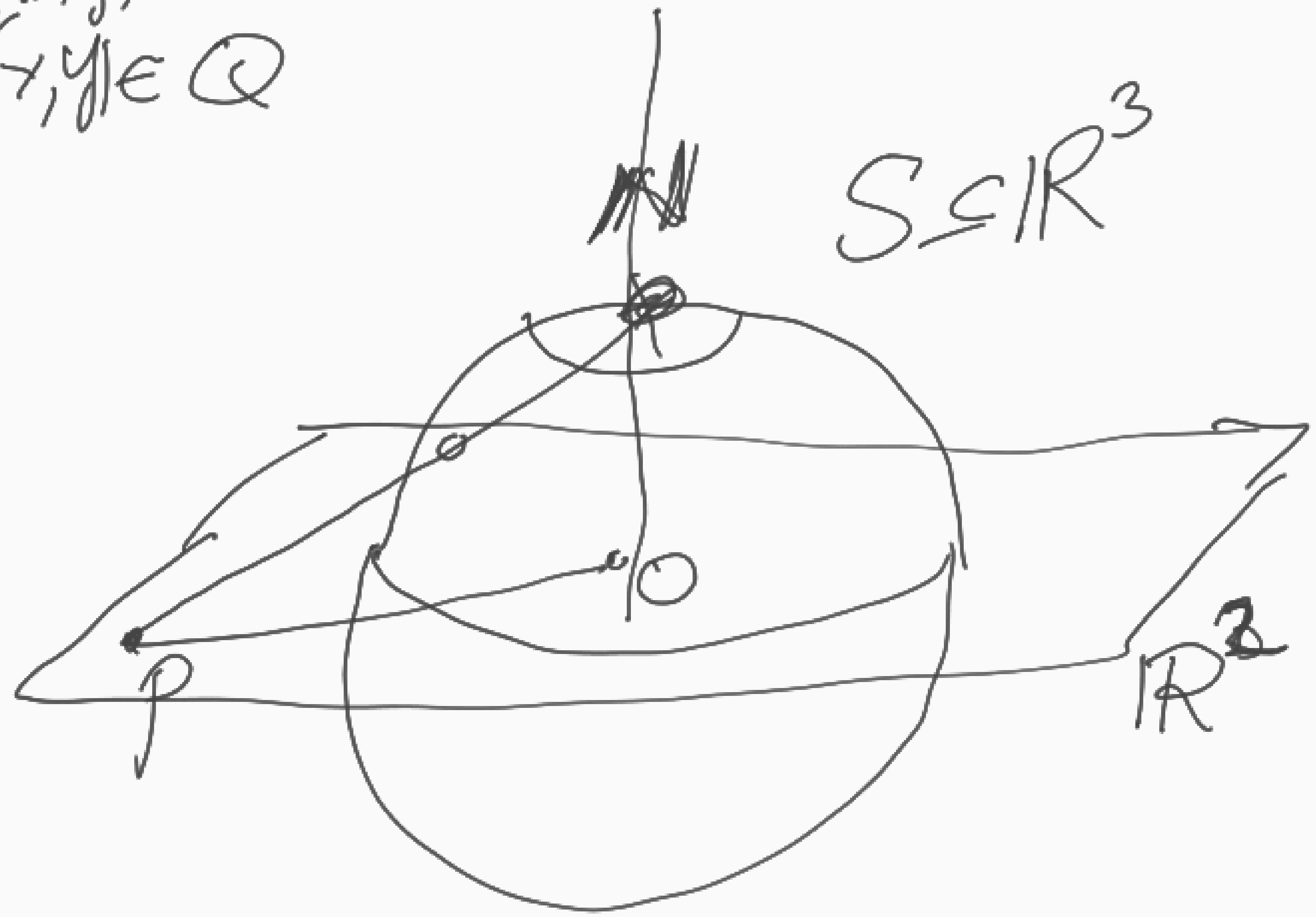
$$f(x,y) \geq -a^3$$

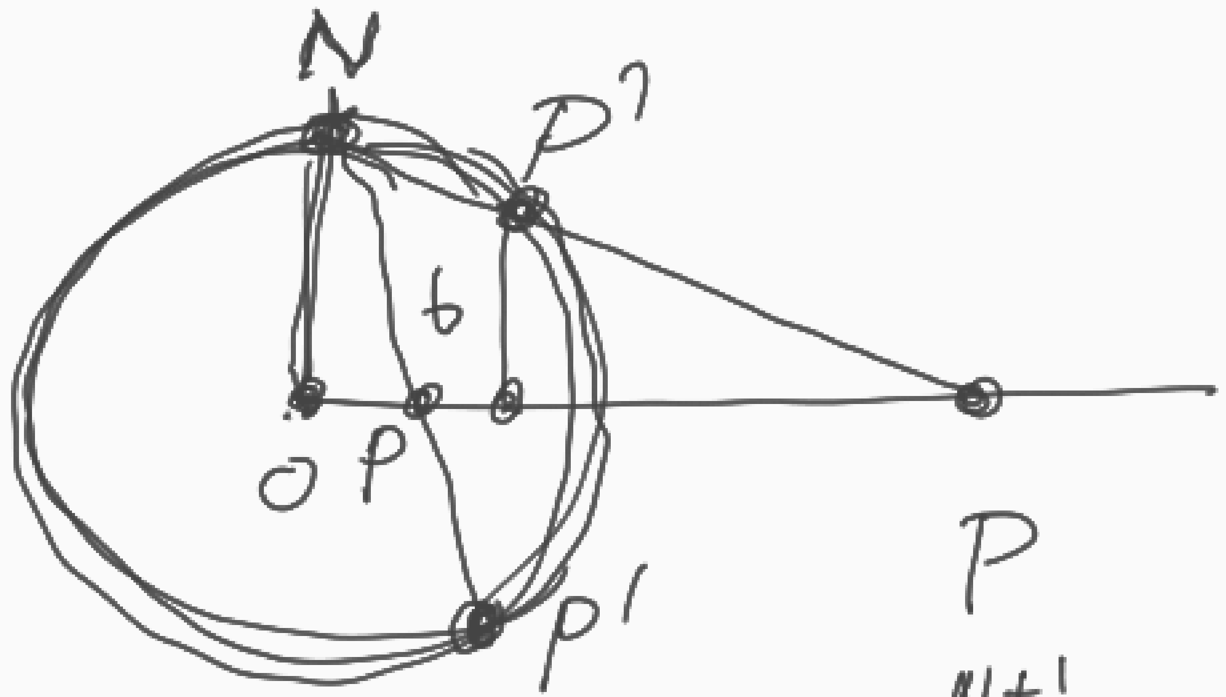
---

fissato $a > 0$

Dobbiamo studiare f_a su $Q = \{(x,y) : x > 0 \text{ et } y > 0\}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to+\infty \\ (x,y)\in Q}} f(x,y) = +\infty$$





Esercizio $S = \{x \in \mathbb{R}^{N+1} : x_1^2 + \dots + x_{N+1}^2 = 1\}$

scrivere questa applicazione $\mathbb{R}^N \xrightarrow{\sim} S \setminus \{N\}$.
in coordinate $(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow (a x_1, \dots, a x_n, b)$

$f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$

$X = (x_1, \dots, x_N)$

$$\lim_{|X| \to \infty} f(X) = l \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \ \exists r \text{ t.c. } |f(X) - l| < \varepsilon \quad \forall |X| > r$$

—— o ——

$$\lim_{|X| \to \infty} f(X) = +\infty \Longleftrightarrow \forall M \ \exists r \text{ t.c. } f(X) \geq M \quad \forall |X| > r$$

$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy$

$a > 0$

$Q = \{x>0,\ y>0\}$

$|xy| \le x^2 + y^2$ $\qquad \begin{cases} |x| \le \sqrt{x^2+y^2} \\ |y| \le \end{cases}$

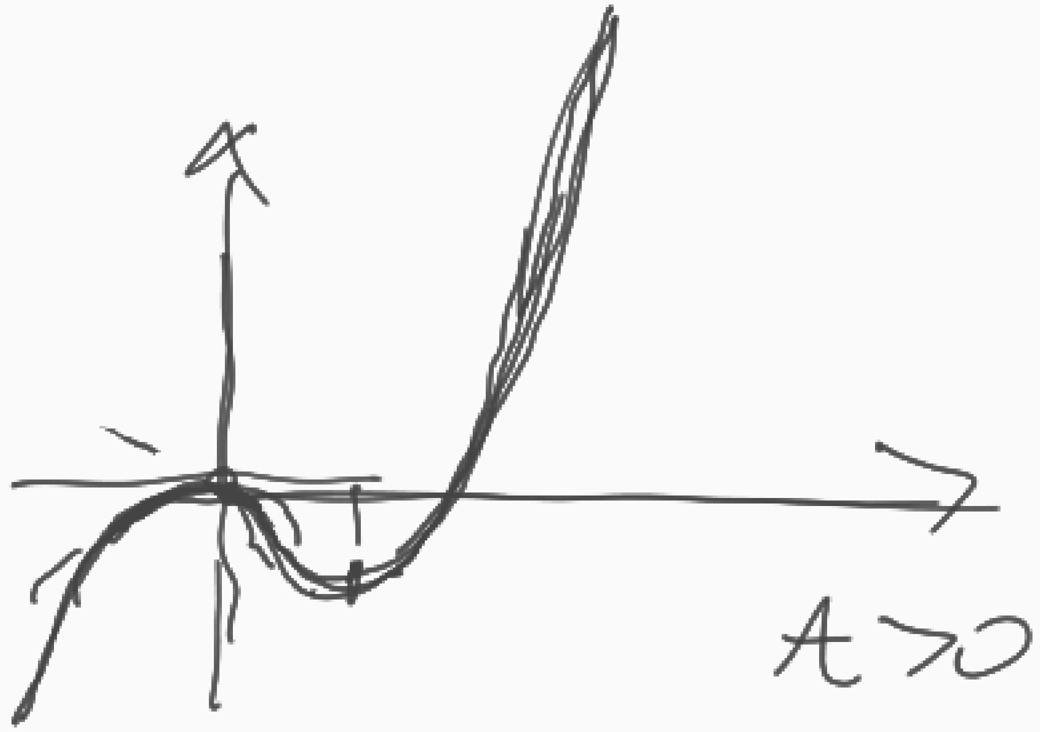
$f(x,y) \ge x^3 + y^3 - 3a(x^2+y^2)$

$\ge \underbrace{(x-3a)x^2} + \underbrace{y^2(y-3a)}$

sono due quantità inferiorm. lim su Q

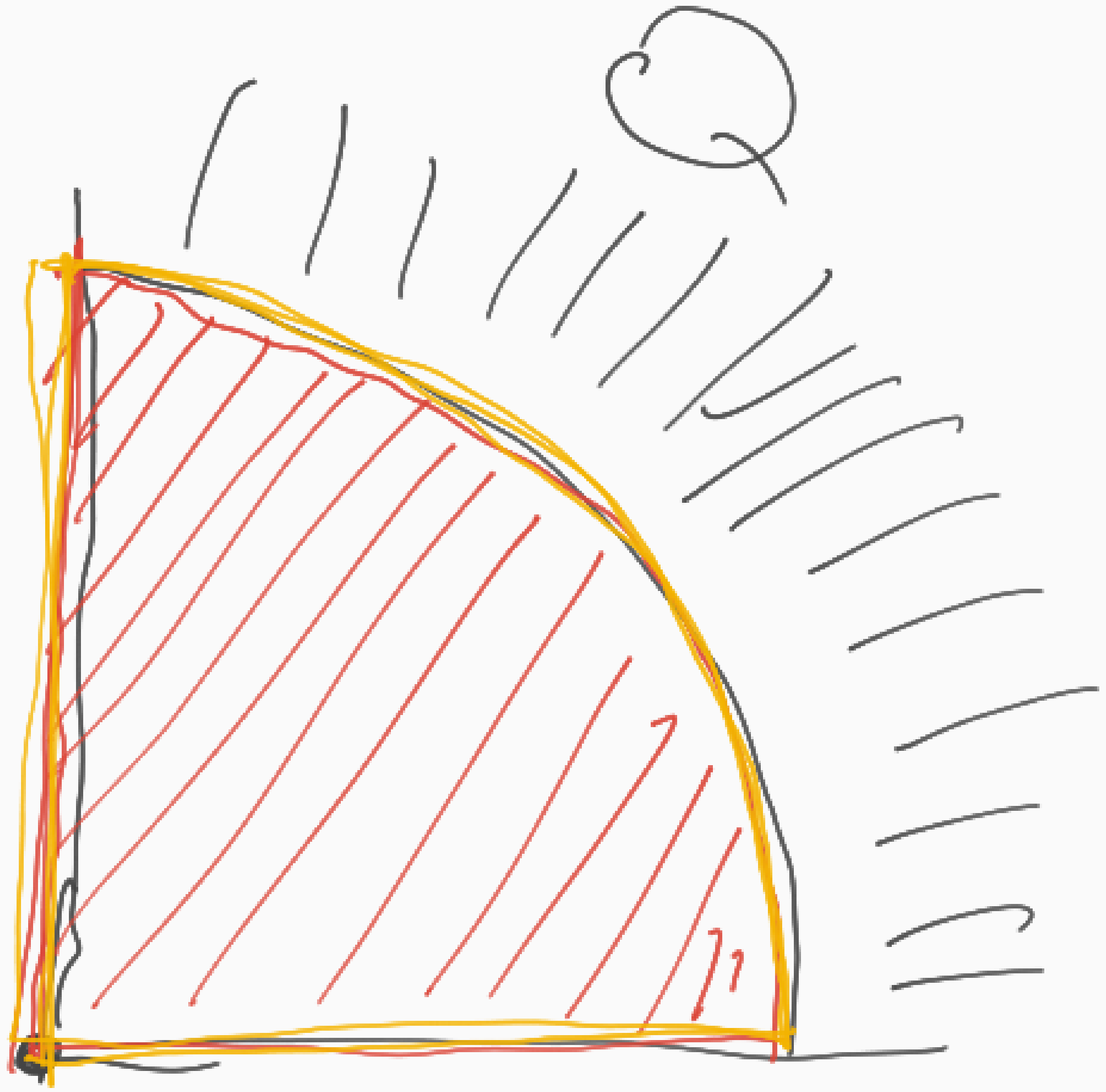
$(x,y) \in Q$

$(x,y) \longrightarrow \infty$ $\qquad \max\{|x|,|y|\} \longrightarrow \infty$



$t \longmapsto t^3 - 3at^2$

è inferiorm. limitata su $t > 0$



r in modo che

$x^2+y^2 \geq r^2$

$f(x,y) \geq 0$

f ammette massimo e minimo su $\boxed{\overline{B(0,r)} \cap Q}$

è chiuso e limitato quindi compatto

Per il principio di Fermat se (x_0,y_0) è un minimo locale per f

$\Rightarrow \nabla f(x_0,y_0) = (0,0)$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)} = 3(x^2 - a\cancel{y}y)$$

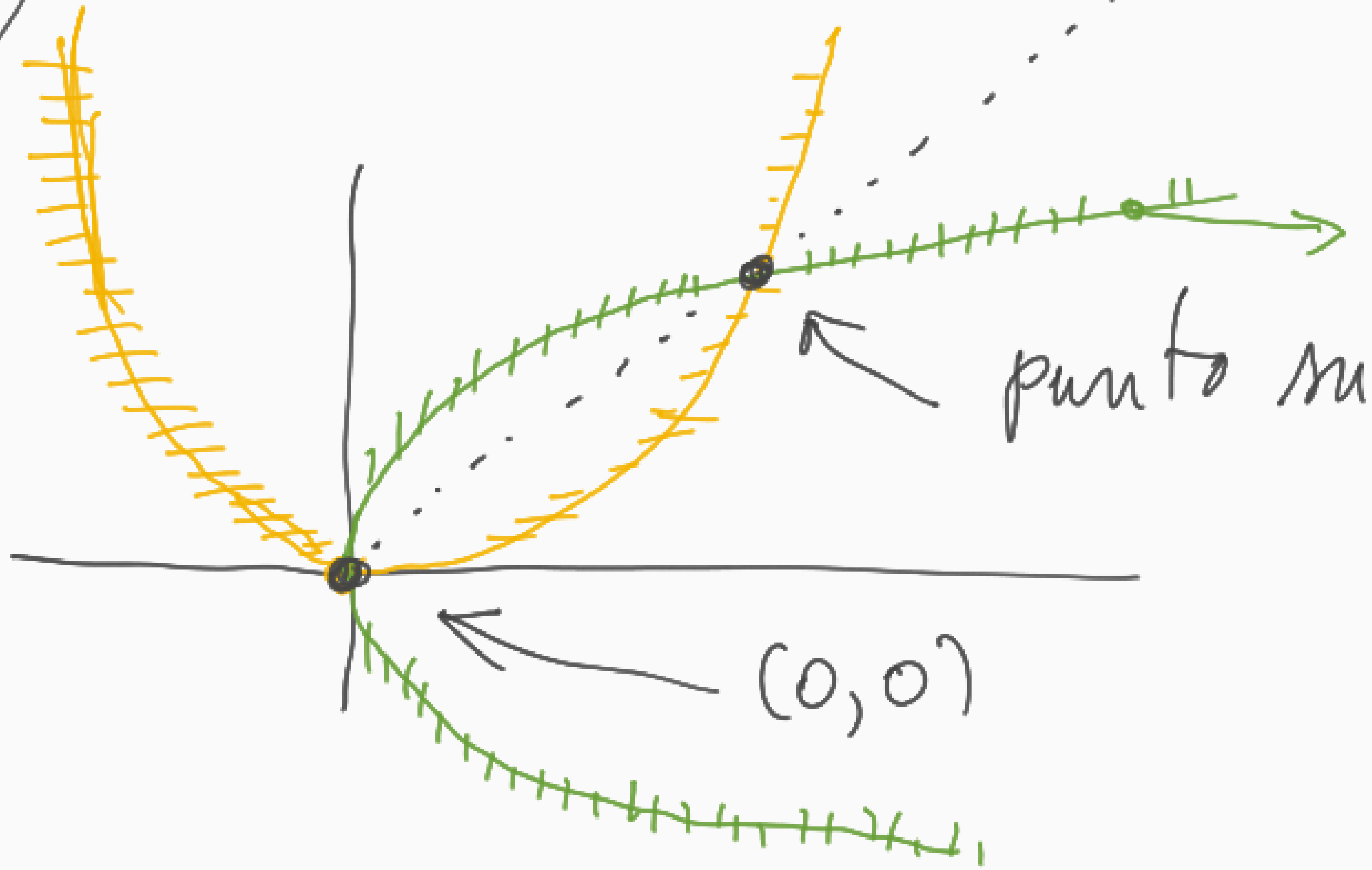
$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)} = 3(y^2 - ax)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \iff x^2 = ay$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \iff y^2 = ax$$

$$\nabla f(x,y) = (0,0)$$

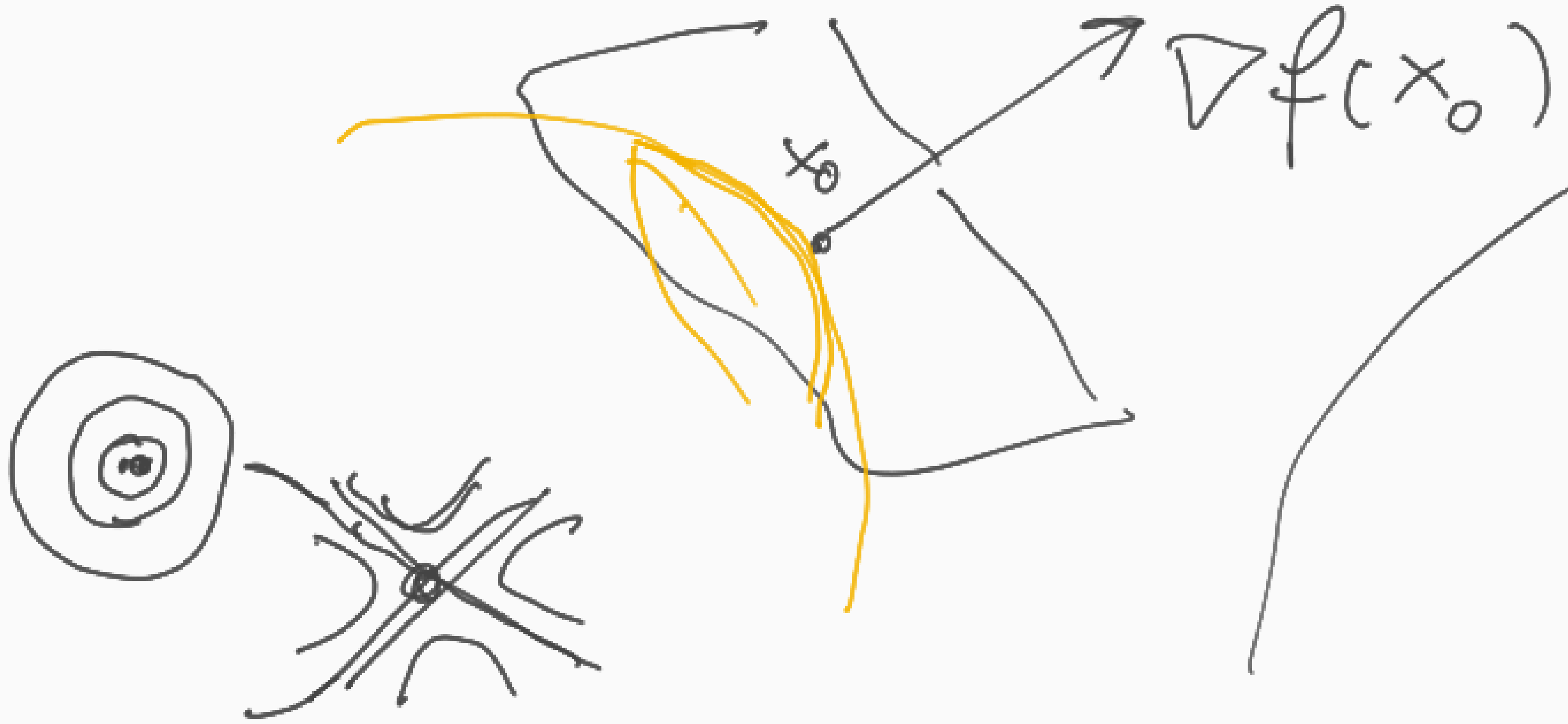
$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy$$



$X = (x_1, \dots, x_n)$ $\qquad$ $c \in \mathbb{R}$

$\boxed{\{X \in \mathbb{R}^N : f(X) = c\}}$ è un insieme di livello

vicino ai punti in cui $\nabla f(x_0) \neq \underline{0}$
l'insieme di livello è ipersuperficie ortogonale al gradiente



nel caso delle curve

L'altro pto critico sta su $x = y$

$$f_x = 3(x^2 - ay) = 3(x^2 - ax)$$

$$f_x = 0 \qquad x = 0 \ \vee \ x = a$$

Punti critici sono $(0,0)$, (a,a)

$(0,0)$ non può essere minimo locale per f

$$f(x,y) = -3xy + o(x^2+y^2) \quad \text{per } (x,y) \to (0,0)$$

$\boxed{\text{Es.}}$ Fare lo studio locale di f vicino ad (a,a) calcolando le ~~derivate su~~ la matrice Hessiana e verificare che è definita positiva

$$f(a,a) = a^3 + a^3 - 3a^3 = -a^3$$

candidato minimo

è il minimo di f su $\overline{B(0,r)\cap Q}$?

$$f(x,0) = x^3 \geq 0$$

verificare che

non esiste $\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} f(x,y)$

(senza la restrizione a Q)

(Basta verificare che $\lim_{x \to -\infty} f(x,0) = -\infty$

Cercare di immaginare come sono le linee di livello $\{ f(x,y) = c \}$

di questa funzione

— o —

Ricordare che
le linee di livello sono perpendicolari al ∇f

(eccetto quando $\nabla f = 0$)

(X, d) spazio metrico ; $L \in \mathbb{R}_+$

~~Def~~: $f : X \to \mathbb{R}$ si dice L-Lip

se $\boxed{|f(x) - f(y)| \leq L\, d(x,y)}$ $\forall x, y \in X$ ☆

<u>OSS</u>: f è L-Lip. $\overset{\Longrightarrow \text{ ovvia}}{\Longleftrightarrow}$ $\boxed{f(x) \leq f(y) + L\, d(x,y)}$ $\forall x, y \in X$ (*)

($\Leftarrow$) se (*) vale $\forall x, y \in X$

vale anche $f(y) \leq f(x) + L\, d(x,y) \Longrightarrow \begin{cases} f(x) - f(y) \leq L\, d(x,y) \\ f(y) - f(x) \leq L\, d(x,y) \end{cases}$

mettendo insieme ⊙ e ⊙⊙ ottengo ★

<u>Lemma</u>: $f_\alpha : X \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \alpha \in A$

tutte f_α sono L-Lip.

Definisco $f(x) := \inf_{\alpha \in A} f_\alpha(x)$

se $f \not\equiv -\infty$

Allora f è L-Lip

(La stessa cosa vale per il sup)

$\forall \alpha \in \mathcal{A}$

$$f(x) \leq f_\alpha(x) \leq f_\alpha(y) + L\, d(x,y) \qquad \forall x, y$$

$f(x)$ è un minorante per $\{f_\alpha(y) + L\, d(x,y) : \alpha \in \mathcal{A}\}$

$$f(x) \leq \inf_\alpha f_\alpha(y) + L\, d(x,y) = f(y) + L\, d(x,y)$$

$\Rightarrow f$ è L-Lip.

Es.

(X,d) sp. metrico

$a \in X$ $\quad f_a(x) := d(x,a) \geq 0$

è 1-lip.

Funzione distanza da un insieme $\quad A \subseteq X$

$$d(x,A) = \inf_{a \in A} d(x,a) = \varphi(x) \geq 0$$

è 1-Lip.

$\varphi(x) = 0 \iff x \in \overline{A}$ (dimostrare per esercizio)

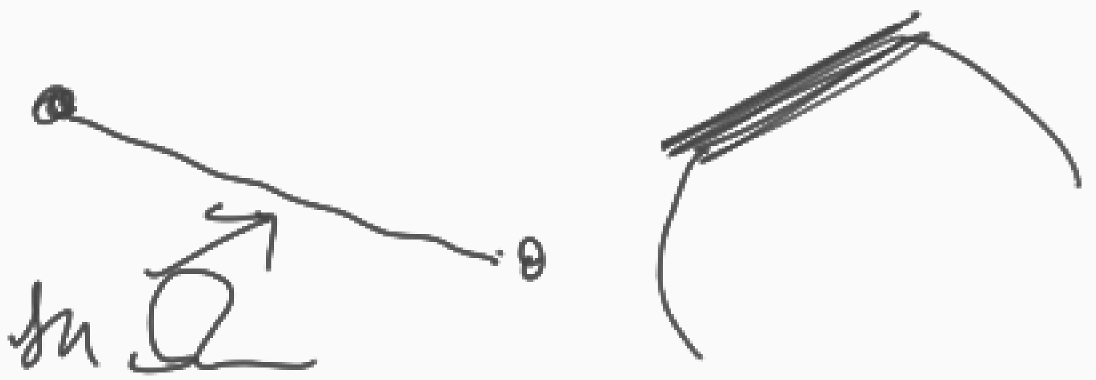
$\boxed{\text{Es2} \quad 25 \text{ gen } 2019}$

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto limitato

Mostrare che $\overline{\Omega}$ contiene una palla di raggio massimo

---

Se $\overline{\Omega}$ è strettamente convesso mostrare (*) che tale palla è unica



$\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ $\quad \varphi(x) = d(x, \Omega^c)$ $\quad \varphi(x) > 0$ solo su Ω