PUNTI SINGOLARI / LISCI DI CURVE AFFINI / PROIETTIVE.

Oss.: Sia C una curva affine e sia $P \in V(C)$.

Abbiamo visto che, $\forall$ retta affine ℓ, vale

$I(C, \ell, P) = I(\overline{C}, \overline{\ell}, P)$

(dove identifico $P \in \mathbb{K}^2$ con $j_0(P) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$).

Ne segue facilmente (usando per esempio che $\ell \mapsto \overline{\ell}$ induce una bigezione tra le rette affini passanti per P e quelle proiettive passanti per P), che

$$m_P(C) = m_P(\overline{C}).$$

Nel seguito, considererò $\mathbb{K}^2$ identificato con $j_0(\mathbb{K}^2) \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ e fisserò coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$ su $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ e $x = \frac{x_1}{x_0}$ e $y = \frac{x_2}{x_0}$ su $\mathbb{K}^2 = U_0 = j_0(\mathbb{K}^2)$.

Se $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ è un polinomio, il gradiente di f è la n-upla di polinomi

$$\nabla f = \underbrace{(f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n})}_{\text{derivate parziali}}$$

Teorema: Sia $C = [f]$ una curva affine. Allora:

① $P \in V(C)$ è singolare $\iff \nabla f(P) = (0,0) = 0$.

② Se $P \in V(C)$ è liscio, un'equazione della retta tangente a C in P è data da (se $P = (a,b)$):

$$f_x(P) \cdot (x-a) + f_y(P)(y-b) = 0$$

(per ①, almeno uno tra $f_x(P)$ e $f_y(P)$ è non nullo).

Dim.: Sia ℓ una retta generica passante per $P = (a,b)$. Essa avrà equazione parametrica $t \mapsto (a+\alpha t, b+\beta t)$, con $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$. Per calcolare $I(C, \ell, P)$, devo calcolare la molteplicità di 0 come radice di $g(t) = f(a+\alpha t, b+\beta t)$. Tale molteplicità è ≥ 2 $\iff g(0) = g'(0) = 0$. Ora per la regola di derivazione delle funzione composte (vale anche per i polinomi!)

$g'(t) = f_x(a+\alpha t, b+\beta t) \cdot \alpha + f_y(a+\alpha t, b+\beta t) \cdot \beta$, da cui

$g'(0) = f_x(P) \cdot \alpha + f_y(P) \cdot \beta$.

Dunque $I(C, \ell, P) \geq 2$ $\forall$ retta ℓ passante per P

$\iff f_x(P) \cdot \alpha + f_y(P) \cdot \beta = 0 \quad \forall (\alpha, \beta) \neq (0,0) \iff$

$\iff \nabla f(P) = 0$. Ciò conclude la dimostrazione di ①.

Per ②, supponiamo che $\nabla f(P) \neq (0,0)$, e sia ℓ parametrizzata da $t \mapsto (a+\alpha t, b+\beta t)$. Allora

ℓ è tangente $\iff I(C, \ell, P) \geq 2 \iff f_X(P)\cdot\alpha + f_Y(P)\cdot\beta = 0$,

cioè (a meno di moltiplicare α, β per uno scalare comune)

$\iff (\alpha, \beta) = (-f_Y(P), f_X(P))$. Ciò è equivalente

al fatto che ℓ abbia equazione cartesiana

$$f_X(P)\cdot(X-a) + f_Y(P)(Y-b) = 0.$$

$\square$

Teorema: $C = [F]$ curva proiettiva, e sia $P = [a:b:c] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$.

Allora:

(1) P è singolare per $C \iff \nabla F(P) = 0$.

(si noti che per $i = 0,1,2$, $F_{x_i}([a,b,c])$ non è ben definito, ma è ben definito l'annullarsi di $F_{x_i}(a,b,c)$, visto che F_{x_i} è esso stesso omogeneo, essendolo F; dunque è ben definita la condizione $\nabla F(P) = 0$).

(2) Se P non è singolare, la retta tangente a C in P ha equazione:

$$F_{x_0}(a,b,c)\cdot x_0 + F_{x_1}(a,b,c)\cdot x_1 + F_{x_2}(a,b,c)\cdot x_2 = 0.$$

Dim.: Si potrebbe usare un argomento diretto, del tutto simile a quello visto nel teorema precedente. In alternativa, possiamo ricondurci al caso affine. Seguiamo questa seconda strada. Sia $P = [a,b,c] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, e supponiamo $a \neq 0$, cioè $P \in U_0 = \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \setminus H_0$

(se $a = 0$, almeno uno tra b e c è diverso da 0

e si ragiona in maniera analoga, lavorando con U_1 o U_2).

Sia D la parte affine di C. Abbiamo visto prima che $m_P(C) = m_P(D)$ (infatti, C è uguale alla chiusura proiettiva di D + eventualmente nH_0 per qualche n; ma le componenti H_0 non contribuiscono a $m_P(D)$, in quanto $P \notin H_0$ – dimostratelo per esercizio! seguirà da quanto vedremo oggi stesso).

Dunque $P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ è singolare per $C \iff$ è singolare per $D = [f]$, $\boxed{f(x,y) = F(1,x,y)}$.

Ora, $f_x(x,y) = F_{x_1}(1,x,y)$, $f_y(x,y) = F_{x_2}(1,x,y)$.

Perciò, posto $P = [1:b:c]$, abbiamo che

P è singolare per $C \iff$ lo è per $D \iff$ per il Teorema appena visto sulle curve affini

$f(b,c) = f_x(b,c) = f_y(b,c) = 0 \iff$

$\iff F(1,b,c) = F_{x_1}(1,b,c) = F_{x_2}(1,b,c) = 0$

Grazie all'identità di Eulero, quest'ultima condizione è equivalente a $F_{x_0}(1,b,c) = F_{x_1}(1,b,c) = F_{x_2}(1,b,c) = 0$ in quanto, da $x_0F_{x_0} + x_1F_{x_1} + x_2F_{x_2} = d \cdot F$, $d = \deg F$, sostituendo $(x_0,x_1,x_2) = (1,b,c)$ e assumendo $F_{x_1}(1,b,c) = F_{x_2}(1,b,c) = 0$ si ottiene

$$1 \cdot F_{x_0}(1,b,c) + 0 + 0 = d \cdot F(1,b,c),$$

da cui $F_{x_0}(1,b,c) = 0 \iff F(1,b,c) = 0$ $\left(\text{sempre nell'ipotesi } F_{x_1}(1,b,c) = F_{x_2}(1,b,c) = 0\right)$

Ciò conclude la dimostrazione di ①.

Per ②, se P è liscio, per quanto visto nel Teorema precedente, la retta tangente affine a $\mathcal{D}$ in P ha equazione

$$f_x(b,c)(x-b)+f_y(b,c)(y-c)=0.$$

La tangente proiettiva si ottiene prendendo la chiusura proiettiva di questa retta, che ha equazione

$$f_x(b,c)(x_1-bx_0)+f_y(b,c)(x_2-cx_0)=0, \text{ cioè}$$

$$\underline{(-bf_x(b,c)-cf_y(b,c))}x_0+\underline{f_x(b,c)}x_1+\underline{f_y(b,c)}x_2=0. \quad (*)$$

Ricordiamo che $f_x(b,c)=\underline{F_{x_1}(1,b,c)}$, $f_y(b,c)=\underline{F_{x_2}(1,b,c)}$, e, sempre usando Eulero,

$$x_0F_{x_0}(x_0,x_1,x_2)=d\cdot F(x_0,x_1,x_2)-x_1F_{x_1}(x_0,x_1,x_2)-x_2F_{x_2}(x_0,x_1,x_2)$$

che, valutata in $(1,b,c)$, dà

$$\underline{F_{x_0}(1,b,c)}=0-bF_{x_1}(1,b,c)-cF_{x_2}(1,b,c)=$$
$$=\underline{-bf_x(b,c)-cf_y(b,c)}$$

Dunque l'equazione $(*)$ della tangente proiettiva si può riscrivere

$$F_{x_0}(1,b,c)x_0+F_{x_1}(1,b,c)x_1+F_{x_2}(1,b,c)x_2=0,$$

come voluto.

□

Osservazione: Nel caso affine, abbiamo avuto $p \in V(C)$, mentre in quello proiettivo solo $p \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$. Il punto è che, grazie a Eulero, nel caso proiettivo, se $\nabla F(p)=0$ allora automaticamente $F(p)=0$; dunque per trovare i punti singolari di F basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} F_{x_0}(x_0,x_1,x_2)=0 \\ F_{x_1}(x_0,x_1,x_2)=0 \\ F_{x_2}(x_0,x_1,x_2)=0 \end{cases} \quad \text{che implica} \quad F(x_0,x_1,x_2)=0.$$

Nel caso affine ciò non capita ed il sistema per i punti singolari è

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$$

Prop.: Sia C una curva affine tale che $P=(0,0)\in V(C)$. Se $C=[f]$, $f=f_{d_1}+f_{d_2}+\dots+f_{d_k}$, con $f_{d_i}\neq 0$ omogeneo di grado d_i e $d_1<d_2<\dots<d_k$, allora $m_P(C)=d_1$ (cioè il grado minimo delle componenti omogenee di f).

Dim.: Se $t \mapsto (\alpha t, \beta t)$ è una retta ℓ per P, $I(C,\ell,P)$ è la molteplicità di 0 come radice di $g(t)=f(\alpha t,\beta t)=f_{d_1}(\alpha t,\beta t)+f_{d_2}(\alpha t,\beta t)+\dots =$

$$= t^{d_1} f_{d_1}(\alpha,\beta) + t^{d_2} f_{d_2}(\alpha,\beta) + \dots + t^{d_k} f_{d_k}(\alpha,\beta) =$$

$$= t^{d_1}\left(\boxed{f_{d_1}(\alpha,\beta)} + t^{d_2-d_1} f_{d_2}(\alpha,\beta) + \dots + t^{d_k-d_1} f_{d_k}(\alpha,\beta)\right)$$

Dunque $I(C,\ell,P) \geq d_1$, e $I(C,\ell,P) = d_1$ se e solo se $f_{d_1}(\alpha,\beta) \neq 0$. Poiché $f_{d_1} \neq 0$, è facile vedere che $\exists\, (\alpha,\beta) \neq (0,0)$ t.c. $f_{d_1}(\alpha,\beta) \neq 0$ (basta $\mathbb{K}$ infinito, cosa che d'ora in poi supporremo sempre). Dunque

$$\min_{\ell} I(C,\ell,P) = d_1, \text{ dunque } m_P(C) = d_1.$$

□

Def.: C curva (proiettiva o affine), $P \in V(C)$. Una retta (proiettiva o affine) ℓ si dice **TANGENTE PRINCIPALE** a C in P se

$$I(C,\ell,P) > m_P(C),$$

cioè se $I(C,\ell,P)$ è strettamente maggiore del minimo possibile.

Esempio: Se $P \in V(C)$ è liscio, allora $m_P(C) = 1$, e ℓ è una tangente principale $\iff I(C,\ell,P) > 1$, cioè se ℓ è tangente (e abbiamo visto sopra che allora è l'unica tangente).

Esempio: Se C è affine e $P = (0,0) \in V(C)$, dai conti fatti sopra segue che, se $f = f_{d_1} +$ termini di grado maggiore, con $C = [f]$ e f_{d_1} omogeneo non nullo di grado d_1, allora se ℓ è parametrizzata da $t \mapsto (\alpha t, \beta t)$, allora

$$I(C, \ell, P) > m_P(C) = d_1$$

$$\Updownarrow$$

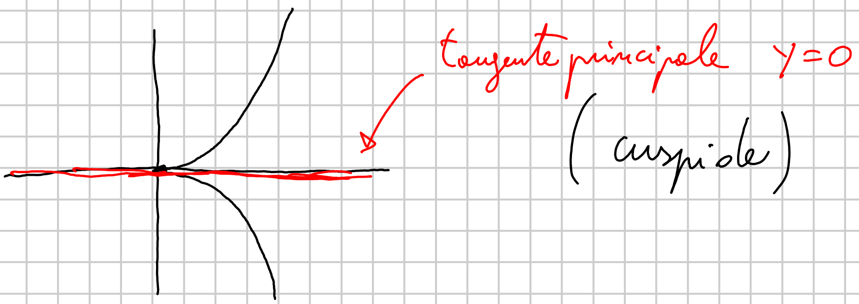
$$f_{d_1}(\alpha, \beta) = 0.$$

Usando questo fatto si può dimostrare che le tangenti principali sono sempre in numero finito e anzi $\leq m_P(C)$ (i loro coefficienti annullano un polinomio omogeneo in due variabili di grado $m_P(C)$), e se $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso sono esattamente $m_P(C)$ se contate con l'opportuna molteplicità.

Definizione: C curva affine. Un asintoto di C è una retta di $\mathbb{K}^2$ la cui chiusura proiettiva sia una tangente principale di $\overline{C}$ in un suo punto all'infinito.

Esempio: (1) $f = Y^2 - X^3$, $C = [f]$ (cioè C "è" la curva $Y^2 = X^3$). $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Determiniamo punti singolari, loro molteplicità e tangenti principali in essi.



$\nabla f = (-3x^2, 2y)$ che si annulla solo in $(0,0)$, che giace sulla curva. Dunque $O=(0,0)$ è l'unico punto singolare di C.

Per quanto appena visto, poiché il monomio di grado minimo che compare in f è y^2, $m_0(C) = 2$.

Tutte le rette sono tangenti, mentre le tangenti principali sono le rette che "annullano" la componente omogenea di grado 2 di f, che è y^2, cioè le rette $t \mapsto (\alpha t, \beta t)$ con $\beta^2 = 0$, cioè la retta orizzontale. (Poiché $y^2 = y \cdot y$, la tangente principale $y=0$ ha "molteplicità" 2).

(2) $y^2 = x^2(x+1)$ equazione di C, dunque

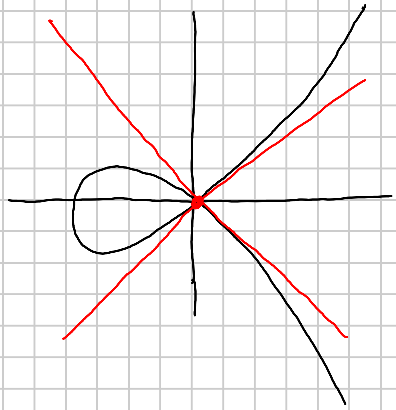
$C = [f]$, $f(x,y) = x^3 + x^2 - y^2$.

$\nabla f = (3x^2+2x, -2y)$, che si annulla in $(0,0)$ e $(-\frac{2}{3}, 0)$. Ora $(0,0) \in V(C)$ ma $(-\frac{2}{3}, 0) \notin V(C)$, per cui l'unico punto singolare è $O = (0,0)$.

Abbiamo $f(x,y) = \underbrace{(x^2-y^2)}_{\text{grado } 2} + \underbrace{x^3}_{\text{grado } 3}$

per cui $m_0(C) = 2$. Poiché $x^2-y^2 = (x-y)(x+y)$, le tangenti principali sono $x-y=0$ e $x+y=0$

(segue da quanto detto prima che la retta $ax+by=0$ è tangente principale in $O \iff$ $(-b, a)$ annulla $f_{d_1}(x,y) \iff ax+by$ è un fattore di $f_{d_1}(x,y)$).



nodo

tangenti principali $y = \pm x$.