Titolo nota — Lezione 15 ottobre — 15/10/2020

ESERCIZI (e qualche teorema)

Ex.: Sia C la curva di $\mathbb{R}^2$ di equazione

$$f(x,y) = x^3 - xy^2 + x^2y - y^3 + xy^4.$$

Si determinino:

① I punti singolari della chiusura proiettiva $\overline{C}$ di C, le loro molteplicità e le loro tangenti principali.

② I punti impropri e gli asintoti di C.

③ Le rette passanti per $[1,0,0]$ e tangenti a $\overline{C}$ in due punti distinti.

Svolgimento: Poiché $f(x,y) = x^3 - xy^2 + x^2y - y^3 + xy^4$, $\overline{C}$ ha equazione uguale all'omogeneizzato F di f, che è (ponendo $x = \frac{x_1}{x_0}$, $y = \frac{x_2}{x_0}$ e moltiplicando per x_0^5, poiché $5 = \deg f$)

$$F(x_0,x_1,x_2) = x_0^2x_1^3 - x_0^2x_1x_2^2 + x_0^2x_1^2x_2 - x_0^2x_2^3 + x_1x_2^4$$

Per trovare i punti singolari di $\overline{C}$, calcolo ∇F, che vale

$$\nabla F = \Big(2x_0x_1^3 - 2x_0x_1x_2^2 + 2x_0x_1^2x_2 - 2x_0x_2^3,$$
$$3x_0^2x_1^2 - x_0^2x_2^2 + 2x_0^2x_1x_2 + x_2^4,$$

$$- 2x_0^2 x_1 x_2 + x_0^2 x_1^2 - 3x_0^2 x_2^2 + 4x_1 x_2^3 \Big).$$

Dunque $F_{x_0} = 2x_0 \left(x_1^3 - x_1 x_2^2 + x_1^2 x_2 - x_2^3 \right) =$

$$= 2x_0 \left(x_1 (x_1^2 - x_2^2) + x_2 (x_1^2 - x_2^2) \right) =$$

$$= 2x_0 (x_1^2 - x_2^2)(x_1 + x_2) = 2x_0 (x_1 + x_2)^2 (x_1 - x_2)$$

Dunque se $[x_0 : x_1 : x_2]$ è singolare, $F_{x_0}(x_0, x_1, x_2) = 0$

e perciò $x_0 = 0$, o $x_1 = x_2$, o $x_1 = -x_2$.

- Caso $x_0 = 0$ Allora

$\nabla F(0, x_1, x_2) = \left(0, x_2^4, 4x_1 x_2^3\right)$ che si annulla se e solo se $x_2 = 0$. In questo caso abbiamo perciò il punto singolare

$A = [0, 1, 0]$

- Caso $x_1 = x_2$. Allora

$$\nabla F(x_0, x_1, x_1) = \Big(0,\ 3x_0^2 x_1^2 - x_0^2 x_1^2 + 2x_0^2 x_1^2 + x_1^4,$$
$$- 2x_0^2 x_1^2 + x_0^2 x_1^2 - 3x_0^2 x_1^2 + 4x_1^4 \Big) =$$

$$= \left(0,\ 4x_0^2 x_1^2 + x_1^4,\ -4x_0^2 x_1^2 + 4x_1^4\right) =$$

$$= \Big(0,\ \underbrace{x_1^2 \underline{(4x_0^2 + x_1^2)}}_{},\ -4x_1^2 (x_1^2 - x_0^2)\Big)$$

se si annulla, $x_0 = x_1 = 0$ (siamo in $\mathbb{R}$!) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $x_0 = x_1 = x_2 = 0$ $\Rightarrow$ no soluzioni nel proiettivo

Dunque affinché $F_{x_1}(x_0, x_1, x_2) = 0$ deve essere $x_1 = 0$, cosa che implica anche $F_{x_2}(x_0, x_1, x_2) = 0$. Dunque, poiché $x_2 = x_1$, in questo caso l'unico punto singolare che ne emerge è

$B = [1, 0, 0]$

- Caso $x_1 = -x_2$. Conti analoghi mostrano che non ci sono altri punti singolari.

Ricapitolando, i punti singolari sono $A = [0,1,0]$, $B = [1,0,0]$.

Per studiare i punti singolari, sfruttiamo che $m_P(C) = m_P(\bar{C})$, e guardiamo A, B in opportune carte affini.
Poiché $B \in U_0 = \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \setminus H_0$, cominciamo da lui (è più facile!). La parte affine di $\bar{C}$ rispetto a x_0 è la C di partenza, che ha equazione

$$f(x,y) = x^3 - xy^2 + x^2y - y^3 + xy^4.$$

Inoltre, B corrisponde all'origine di $\mathbb{K}^2$ in quanto $B = [1,0,0]$.
La molteplicità dell'origine è il grado minimo delle componenti omogenee di f, in questo caso 3, dunque $m_B(\bar{C}) = 3$.
Per trovare le tangenti principali in B, considero la componente di grado 3 $\quad x^3 - xy^2 + x^2y - y^3 = x(x^2-y^2) + y(x^2-y^2) =$
$= (x+y)^2(x-y)$, dunque le tangenti principali affini in B sono $x+y=0$ e $x-y=0$, per cui quelle proiettive sono $x_1 + x_2 = 0$ e $x_1 - x_2 = 0$

Per il punto $A = [0,1,0]$, deomogeneizziamo rispetto a x_1, introducendo le variabili $u = \frac{x_0}{x_1}$, $v = \frac{x_2}{x_1}$,
ottenendo che la parte affine $C \cap U_1$ ha equazione

$$g(u,v) = F(u,1,v) = u^2 - u^2v^2 + u^2v - u^2v^3 + v^4$$

monomio di grado minimo

In questa carta, $A=[0,1,0]$ corrisponde a $(0,0)\in\mathbb{K}^2$.
Ragionando come prima si ho $m_A(\overline{C})=2$, e l'unica tangente principale in A è $u=0$, la cui chiusura proiettiva è $x_0=0$.

(2) I punti impropri si ottengono mettendo a sistema $F(x_0,x_1,x_2)=0$ e $x_0=0$, cioè risolvendo $F(0,x_1,x_2)=0$, che in questo caso dà:

$0=x_1x_2^4$, che dà a sua volta i punti impropri con $x_1=0$ o $x_2=0$, cioè $[0,0,1]$ e $[0,1,0]$.

Per cercare gli asintoti, poiché un asintoto è una retta la cui chiusura proiettiva sia una tangente principale in un punto improprio, devo calcolare le tangenti principali nei punti impropri, e prenderne la parte affine (quando c'è, cioè scartando eventuali rette di equazione $x_0=0$).

Procediamo con i punti impropri. $[0,0,1]$ è liscio (non lo abbiamo trovato tra i punti singolari), e $\nabla F(0,0,1)=(0,1,0)$, per cui la tangente (che è anche l'unica tangente principale) a $\overline{C}$ in $[0,0,1]$ ha equazione $0\cdot x_0+1\cdot x_1+0\cdot x_2=0$, cioè $x_1=0$, la cui parte affine è $x=0$. Dunque $x=0$ è un asintoto di C.

Per quanto riguarda l'altro punto improprio $[0,1,0]$, abbiamo visto che è singolare con una sola tangente principale, che però è proprio la retta impropria, che non dà luogo ad asintoti.

Dunque l'unico asintoto di C è $x=0$.

(3) Le rette passanti per $[1,0,0]=B$ sono tutte e sole le rette di equazione $ax_1+bx_2=0$, al variare di $[a,b]\in\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Se $b=0$, ho la retta $x_1=0$, che interseca $V(C)$ nei punti con

$0=F(x_0,0,x_2)=-x_0^2x_2^3$, che dà luogo ai punti $[0,0,1]$ e $[1,0,0]$ (poiché $x_1=0$ perché cerco punti sulla retta $x_1=0$, e o $x_0=0$ o $x_2=0$).

$V(C)\cap\{x_1=0\}=\{[0,0,1],[1,0,0]\}$.

Abbiamo visto al punto precedente che $x_1=0$ è tangente a $\bar{C}$ in $[0,0,1]$; inoltre, $[1,0,0]$ è singolare, perciò tutte le rette passanti per $[1,0,0]$ sono tangenti a $\bar{C}$ in $[1,0,0]$. Dunque la retta $x_1=0$ verifica le richieste.

Vediamo ora cosa accade se $b\neq 0$, cioè consideriamo le rette della forma $ax_1+x_2=0$. Per calcolare $V(C)\cap\{ax_1+x_2=0\}$, sostituisco $x_2=-ax_1$ in F, ottenendo

$F(x_0,x_1,x_2) = F(x_0,x_1,-ax_1) = x_0^2x_1^3 - a^2x_0^2x_1^3 - ax_0^2x_1^3 +$
$+ a^3x_0^2x_1^3 + a^4x_1^5 = x_1^3\left(x_0^2(1-a^2-a+a^3) + a^4x_1^2\right) =$
$= x_1^3\left(x_0^2\left(a^2(a-1)-(a-1)\right) + a^4x_1^2\right) = x_1^3\left(x_0^2(a-1)^2(a+1) + a^4x_1^2\right)$

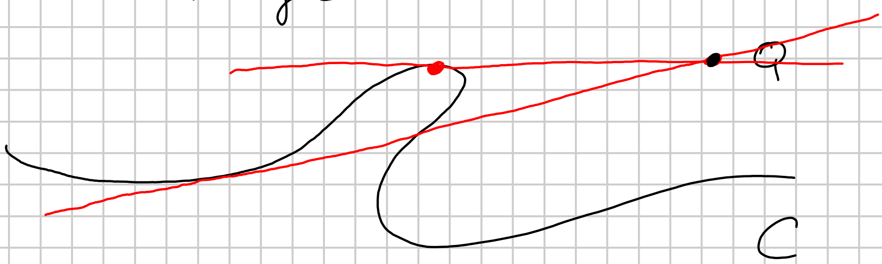
Le soluzioni proiettive di questo polinomio corrispondono ai punti di $V(\bar{C}) \cap \{ax_1+x_2=0\}$. Voglio che tra tali punti ve ne siano 2 in cui la retta è tangente a $\bar{C}$, cioè che corrispondano a radici proiettive almeno doppie. Il fattore x_1^3 dà luogo alla soluzione $x_1=0$, cioè al punto $[1:0:0]$ (ricordiamo $x_2=-ax_1$), con molteplicità di intersezione 3 (coerente con il fatto che $[1:0:0]$ abbia molteplicità 3). Voglio che il termine

$$x_0^2(a-1)^2(a+1) + a^4x_1^2 = g(x_0,x_1)$$

dia luogo ad un altro punto in cui vi sia tangenza, cioè ad un'altra radice almeno doppia. Avendo grado 2, l'unica possibilità è che $g(x_0,x_1)$ abbia un solo fattore lineare, con molteplicità 2, sia cioè della forma $g(x_0,x_1) = k\cdot(\alpha x_0 - \beta x_1)^2$. Ciò equivale a $\Delta=0$, e, poiché manca il termine in $x_0 \cdot x_1$, equivale a $(a-1)^2(a+1)=0$ o $a^4=0$, dunque dobbiamo esaminare i casi $a=1$, $a=-1$, $a=0$.

Si verifica facilmente che, se $a=1$ o $a=-1$, in effetti la retta $ax_1+x_2=0$ interseca $V(C)$ solo in $[1,0,0]$ con molteplicità $3+2=5$, dunque questa retta NON verifica la richiesta. Se $a=0$, la retta $x_2=0$ interseca $V(C)$ in due punti distinti, nei quali è tangente, e verifica perciò la richiesta. $\square$

Ex.: Sia C una curva proiettiva liscia in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, e sia $Q \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Si mostri che, se $\deg C > 1$, allora $\exists$ retta passante per Q e tangente a C in qualche suo punto, e che il numero di tali rette è al più $n\cdot(n-1)$, dove $n = \deg C$.



Dim.: Sia $Q=[q_0,q_1,q_2]$. Dato $[x_0,x_1,x_2] \in V(C)$, la retta tangente a C in $[x_0,x_1,x_2]$ (che è unica perché C è liscia), ha equazione

$$x_0 F_{x_0}(x_0,x_1,x_2)+x_1 F_{x_1}(x_0,x_1,x_2)+x_2 F_{x_2}(x_0,x_1,x_2) = 0$$

Dunque Q appartiene a tale retta se e solo se

$$q_0 F_{x_0}(x_0,x_1,x_2)+q_1 F_{x_1}(x_0,x_1,x_2)+q_2 F_{x_2}(x_0,x_1,x_2)=0,$$

e il punto $P \in V(C)$ è tale che tangente T_P a C in P passa per $Q \iff$ le coordinate di P verificano

$$\begin{cases} q_0 F_{x_0} + q_1 F_{x_1} + q_2 F_{x_2} = 0 \\ F = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Verifichiamo che la prima delle due equazioni è non banale, cioè $\varphi_0 F_{x_0} + \varphi_1 F_{x_1} + \varphi_2 F_{x_2}$ non è identicamente nullo.
Se fosse identicamente nullo potremmo supporre ad esempio $\varphi_0 \neq 0$ (gli altri casi sono identici), per cui $F_{x_0} = \alpha F_{x_1} + \beta F_{x_2}$.
I polinomi F_{x_1}, F_{x_2} sono omogenei di grado $(n-1)$ o nulli.
In ogni caso, Bézout ci assicura che
$V(F_{x_1}) \cap V(F_{x_2}) \neq \emptyset$. Se $R \in V(F_{x_1}) \cap V(F_{x_2})$, da
$F_{x_0} = \alpha F_{x_1} + \beta F_{x_2}$ deduciamo $R \in V(F_{x_0})$, dunque R annullerebbe ∇F, contro l'ipotesi che C sia liscia.
Perciò la prima equazione del sistema $(*)$ è descritta da un polinomio omogeneo di grado $(n-1)$ non banale.
Dunque, per Bézout, il sistema $(*)$ ammette almeno una soluzione.

Per concludere, basta osservare che le curve C e

$\varphi_0 F_{x_0} + \varphi_1 F_{x_1} + \varphi_2 F_{x_2} = 0$ non possono avere componenti in comune, e perciò si intersecano in al più $n \cdot (n-1)$ punti.
Dunque $|\{P \in V(C) \text{ t.c. } Q \in \tau_P\}| \leq n(n-1)$, da cui segue la tesi.

Per dire che C e $\varphi_0 F_{x_0} + \varphi_1 F_{x_1} + \varphi_2 F_{x_2} = 0$ non hanno componenti in comune serve il risultato 3 qui sotto.

1 Siano C, C' curve proiettive, $P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$. Allora

$m_P(C + C') = m_P(C) + m_P(C')$.

Dim.: Posso scegliere coordinate tali che $P=[1,0,0]$, e calcolare la molteplicità nella carta affine U_0.
Se D è la parte affine di C e D' la parte affine di C', allora $D+D'$ è la parte affine di $C+C'$.
Inoltre, se f, f' sono le equazioni di D, D',
$m_P(D) =$ minimo grado delle componenti omogenee di f
$m_P(D') =$ " " " " " f'

$D+D'$ ha equazione $f \cdot f'$, la cui componente omogenea di grado minimo è il prodotto delle componenti omogenee di grado minimo di f e f'. Dunque
$m_P(D+D') = m_P(D) + m_P(D')$, come voluto.

(2) C, C' curve proiettive, $P \in V(C+C')$
Allora P è singolare per $C+C' \iff$ è singolare per C o è singolare per C', o appartiene a $V(C) \cap V(C')$.

Dim.: Segue da $m_P(C+C') = m_P(C) + m_P(C')$, che è $\geq 2 \iff$ o $m_P(C) \geq 2$ o $m_P(C') \geq 2$ o sono entrambi almeno 1 (cioè $P \in V(C) \cap V(C')$).

(3) Sia $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso, C curva liscia in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$. Allora C è irriducibile.

Dim.: Se $C = C_1 + C_2$, per Bézout $V(C_1) \cap V(C_2) \neq \emptyset$, per cui per (2) ogni punto di $V(C_1) \cap V(C_2)$ è singolare, contro l'ipotesi che C sia liscia.

Ex.: Sia $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso, e sia C una conica in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$. Allora i seguenti fatti sono equivalenti:

① C è degenere.

② C è singolare.

③ C è riducibile.

Dim.: Sia $f = \sum_{i,j=0}^{2} a_{ij} x_i x_j$ l'equazione di C, e sia $A = (a_{ij})$ la matrice che rappresenta C. Allora

$$\nabla F = \left(2a_{00}x_0 + 2a_{01}x_1 + 2a_{02}x_2,\ 2a_{10}x_0 + 2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2,\ 2a_{20}x_0 + 2a_{21}x_1 + 2a_{22}x_2\right),$$

e perciò il sistema $\begin{cases} F_{x_0}(x_0,x_1,x_2)=0 \\ F_{x_1}(x_0,x_1,x_2)=0 \\ F_{x_2}(x_0,x_1,x_2)=0 \end{cases}$ è equivalente

a $2A\cdot x = 0$. Dunque $\exists$ punto singolare $\iff \det A = 0$, da cui ① $\iff$ ②.

② $\Rightarrow$ ③: Sia $P \in V(C)$ un punto singolare, e sia $Q \in V(C) \setminus \{P\}$. Allora se r è la retta che passa per P e per Q,

$$\sum_{T \in r \cap V(C)} I(C, r, T) \geq I(C, r, P) + I(C, r, Q) \geq$$

$$\geq 2 + 1 = 3 > \deg C$$

per cui r è componente di C, e C è riducibile.

③ $\Rightarrow$ ②: Segue dal Teorema precedente.