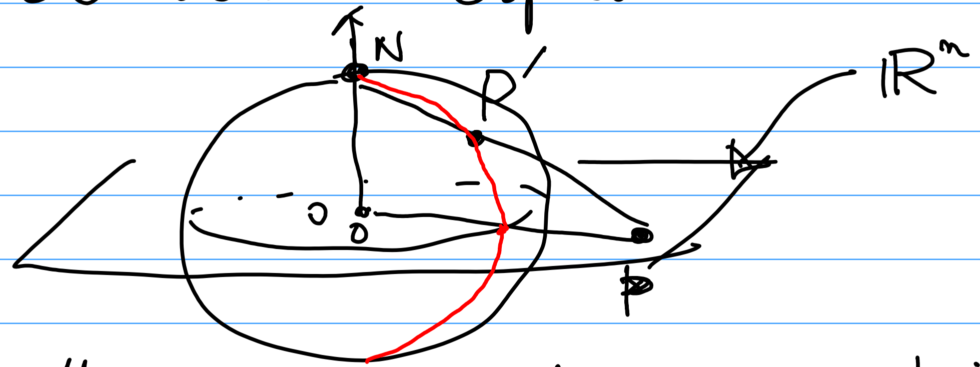
15 ott 2020

Scrivere l'espressione della proiez. stereografica



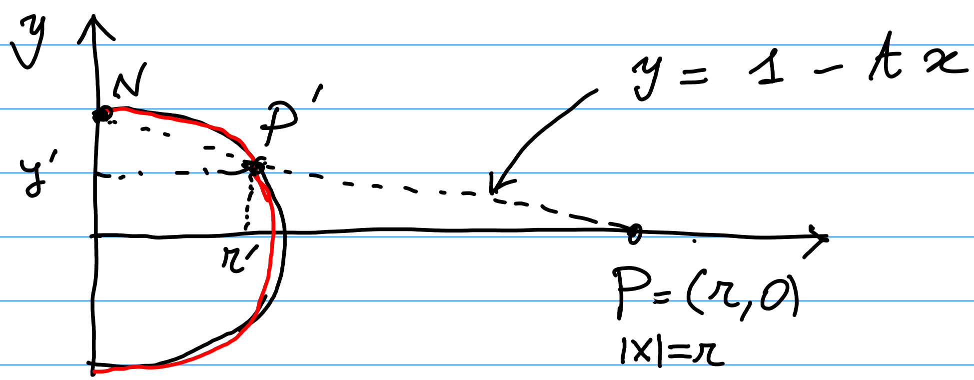
$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow S \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (??)$$

$$(\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{x}, y)$$

$$S = \{(x, y) : |x|^2 + y^2 = 1\}$$

tutto si svolge sul piano individuato dai punti N, O, P



$$t = \frac{1}{r}$$

$$\begin{cases} \boxed{y = 1 - tx} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$x^2 + \cancel{1} - 2tx + t^2x^2 = \cancel{1}$$

$$x\left[(1+t^2)x - 2t\right] = 0$$

$$x = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2/r}{1 + 1/r^2}$$

$$r' = \frac{2}{1+r^2}\, r$$

$$\boxed{y' = \frac{r^2 - 1}{1 + r^2}}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow \left(\frac{x_1}{1+|x|^2}, \frac{x_2}{1+|x|^2}, \dots, \frac{x_n}{1+|x|^2}, \frac{|x|^2-1}{1+|x|^2} \right)$$

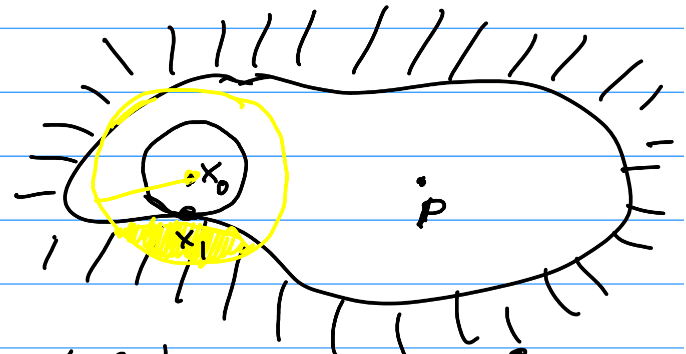
↖ appartiene ad S

Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto limitato $\Rightarrow$ $\exists$ palla di raggio massimo contenuta in Ω

Se Ω è strettamente convesso $\Rightarrow$ tale palla è unica

---

Considero $\varphi(x) = d(x, \Omega^c)$



$\varphi(x) = 0$ per $x \in \Omega^c$

$\varphi(x) > 0$ per $x \in \Omega$

$\boxed{\varphi \geq 0}$

Oss: φ è continua su $\mathbb{R}^n$, $\displaystyle\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(x) = \sup_{x \in \overline{\Omega}} \varphi(x) = \max_{x \in \overline{\Omega}} \varphi(x) = \varphi(p)$
$\varphi \geq 0$

WEIERSTRASS

φ ammette massimo su $\overline{\Omega}$

Oss: se $x_0 \in \Omega$ $\varphi(x_0)$ è il raggio della sfera più grande centrata in x_0 e contenuta in $\overline{\Omega}$ (*)

$B(p, \varphi(p))$ è una palla di raggio massimo interamente contenuta $\overline{\Omega}$

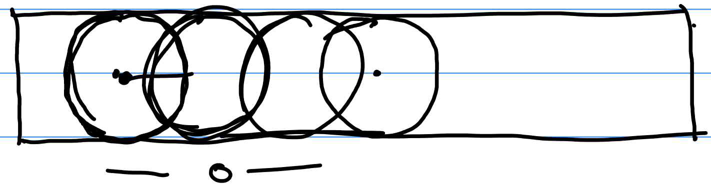
$$(\ast)\quad \varphi(x_0) = d(x_0, \Omega^c) = \inf_{x \in \Omega^c \cap B(x_0, r)} d(x_0, x) = \min_{x \in \Omega^c \cap B(x_0, r)} d(x_0, x) = d(x_0, x_1)$$

per un certo $x_1 \in \partial\Omega$

$r > \varphi(x_0)$

Tale palla non è necessariamente unica.

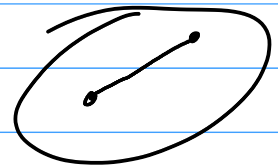
Per esempio



Se $\overline{\Omega}$ è strettamente convesso allora il massimo è unico

<u>Def</u>: V sp. vettoriale, $C \subseteq V$ è convesso se

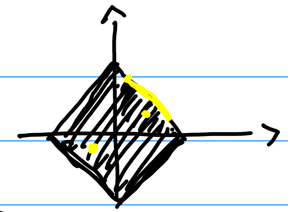
$\forall\, x, y \in C$ il segmento $[x, y] \doteq \{ tx + (1-t)y \;:\; t \in [0,1] \}$ è interamente contenuto in C



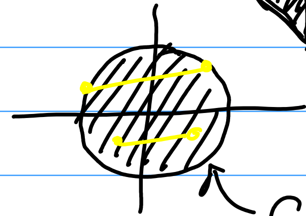
C è strettamente convesso se è convesso e $]x, y[\doteq \{ tx + (1-t)y \;:\; t \in (0,1) \}$ è interamente contenuto int(C)

Esempio (in $\mathbb{R}^2$): $C_2 =$

$C_1 = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : \; |x| + |y| \leq 1\}$ è convesso / ma non strettamente



$C_2 = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : \; x^2+y^2 \leq 1\}$ → è convesso

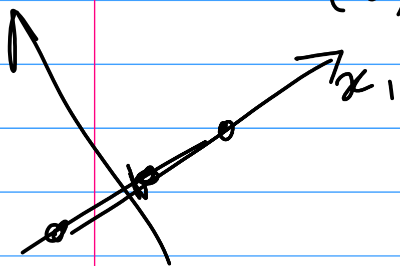


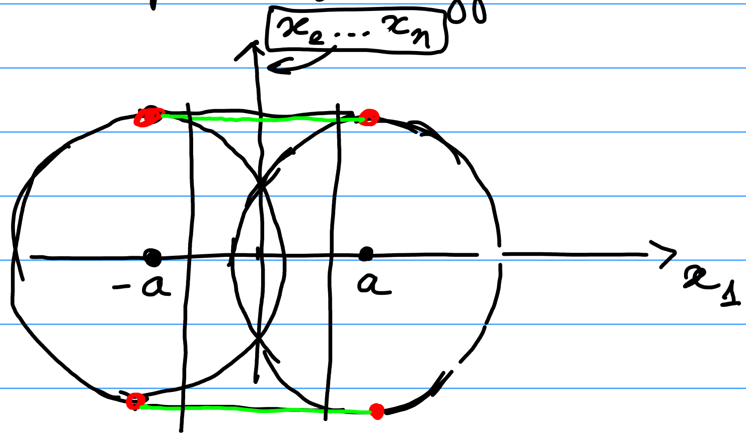
C_2

———o———

Verifico l'unicità procedendo per assurdo:
suppongo che esistano due palle di raggio massimo r

SPG posso supporre che i centri delle due palle siano in $(a,0,0,\dots,0)$
$(-a,0,\dots,0)$





$\overline{B(-a,r)} \subset \overline{\Omega}$

$\overline{B(a,r)} \subset \overline{\Omega}$

se $p \in [-a,a]$ anche $\overline{B(p,r)} \subseteq \overline{\Omega}$ per convessità

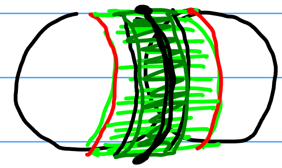
~~per~~ $(p, x_2, \dots, x_n)$ tali che $\begin{cases} x_2^2 + \dots + x_n^2 = r^2 \\ -a < p < a \end{cases}$ sono contenuti in Ω

per la proprietà di STRETTA convessità

Se invece considero i punti del tipo

$$\left\{ (p, x_2, \dots, x_n) \text{ con } x_2^2+\dots+x_n^2 = r^2, \quad |p| \le \frac{a}{2} \right\} \leftarrow G$$

G è compatto



$$\min_{x \in G} d(x, \Omega^c) > 0$$

Questo vuol dire che $\overline{B(0,r)}$ è interamente contenuta in Ω

$\Rightarrow \exists\, r' > r$ t.c. $B(0,r')$ è contenuta in Ω

Se $\overline{B(0,r)}$ è contenuto in Ω

$$\delta = \min_{x \in \overline{B(0,r)}} d(x, \Omega^c) > 0$$

$$\boxed{\text{basta prendere } r < r' < r + \delta}$$

Caratterizzazione equivalente della conv.

Prop: ~~Sia~~ $C \subseteq V$ ← spazio vettoriale

Le seguenti condizioni sono equivalenti:

(i) C convesso

(ii) $\forall\, x_1, \dots x_\ell$ punti di C

$\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ scalari ≥ 0 t.c. $\sum^{\ell} \lambda_i = 1$

allora anche $\sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j x_j \in C$

$x_1, x_2 \in C$

$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in C$

$\lambda_1 + \lambda_2 = 1$

comb. convessa degli x_j

Dim: (ii) $\Rightarrow$ (i) è ovvio (basta prendere $\ell = 2$)

(i) $\Rightarrow$ (ii) procedo per induzione su ℓ — C convesso & (ii) vale per ℓ punti

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_\ell x_\ell \qquad \lambda_0 + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$$

$$\| $$

$$\lambda_0 x_0 + (1-\lambda_0) \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\lambda_j}{(1-\lambda_0)} x_j$$

$\to \in C$ per ipotesi induttiva

$\to \in C$ in quanto per la Def

OSS/esercizi: Intersezione (arbitraria) di convessi è convesso

Se V è data una norma, C convesso $\Rightarrow$ $\overline{C}$ e $\mathrm{int}(C)$ sono convessi

C_1, C_2 convessi $\quad C_1 + C_2 \doteq \{x+y : x \in C_1, y \in C_2\}$ è convesso

Se $L : V \to W$ è lineare, C convesso $\Rightarrow$ $L(C)$ è conv.

— o —

$B \subset V$ $\quad B$ non necess. convesso

$co(B)$ = intersezione di tutti i convessi contenenti B

inviluppo convesso generato da B

Prop: $co(B) = \boxed{\left\{ y = \sum_{j=0}^{\ell} \lambda_j x_j : \sum_1^{\ell} \lambda_j = 1, \ \lambda_j \geq 0, \ x_j \in B \ \forall j \right\}}$ $(*)$

Dim: Se C convesso e $C \supset B$ $\Rightarrow$ ogni y della forma $\in C$,

$\Rightarrow C \supset (*) \Rightarrow \boxed{co(B) \supset (*)}$

Vale anche il viceversa: l'insieme (*) è un convesso e contiene B

$$\boxed{(*) \supset co(B)}$$

#

— o —

Def: E spazio vettoriale, $\Omega \subseteq E$ convesso

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ si dice (strett) convessa

se $\forall\, x \neq y \in \Omega$, $\forall\, t \in [0,1]$

$$f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$$

vale la disug stretta $t \in]0,1[$

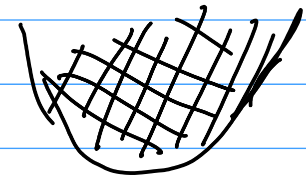
— o —

Nei casi che prenderemo in considerazione $E = \mathbb{R}^n$ o uno sp. normato

Esercizio:

(1) mostrare che f convessa $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{epi}(f) \subset \Omega \times \mathbb{R}$ è convesso

$$\mathrm{epi}(f) = \{(x,y) : x \in \Omega,\ y \in \mathbb{R},\ y \geq f(x)\}$$



(1) bis $\quad f: V \to \mathbb{R}$, $\quad$ f convessa $\Longleftrightarrow$ epi(f) strett. convesso

$\uparrow$ sp. vett.

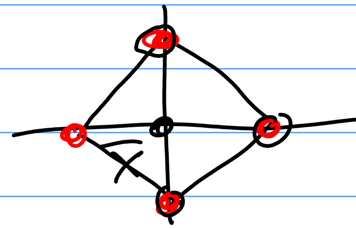
<u>Prop</u>: Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto convesso allora f convessa

$\Longrightarrow$ f è localmente limitata

<u>Dim</u>: Si $\bar{x} \in \Omega$ posso scegliere $\delta > 0$ in modo che

$$B_\delta := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \quad |x_1 - \bar{x}_1| + \dots + |x_n - \bar{x}_n| \leq \delta\} \subseteq \Omega$$

palla chiusa di raggio δ nella norma 1



I punti di B_δ sono comb. convesse dei punti

$\boxed{\bar{x} \pm \delta e_j}$ dove e_j è il j-esimo elemento della base

verifica: per esercizio $\qquad j = 1, \dots, n$

$\boxed{2n}$

Di conseguenza posto M ~~max~~ max di f su questi valori otteniamo che f è superiormente limitata da M su B_δ.

Nelle stesse ipotesi di sopra possiamo dimostrare che f è continua in ogni punto di Ω anzi è loc. lipschitziana

(lo vediamo domani)